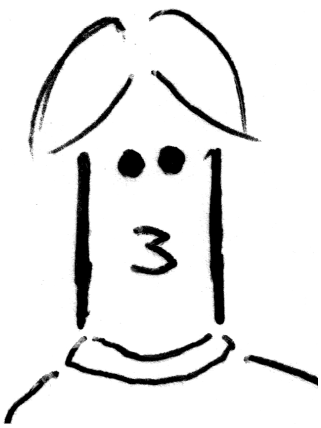
青春の高校数学 3

方手雅塚 著



中表紙イラスト 「絶対値さん」 by 方手雅塚

青春の高校数学 3

by

方手雅塚

目次

序文 vii

第 1 章　数列の極限 1
1.1 数列の極限 1
1.2 数列の極限の計算 3
1.3 はさみうちの原理 5
1.4 無限等比数列 8
1.5 無限級数 9
1.6 無限等比級数 12
1.7 無限級数の性質 14
1.8 無限小数 15

第 2 章　関数の極限 17
2.1 分数関数 17
2.2 無理関数 19
2.3 逆関数 21
2.4 合成関数 23
2.5 関数の極限 25
2.6 極限から関数の係数決定 27
2.7 片側からの極限 28
2.8 $x \to \pm\infty$ のときの極限 29
2.9 指数関数・対数関数の極限 31
2.10 三角関数の極限 32
2.11 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 34
2.12 関数の連続 37
2.13 ガウス記号 39
2.14 連続関数の最大・最小 40
2.15 中間値の定理 41

第 3 章　微分法 45
3.1 微分可能と連続 45
3.2 導関数とその性質 47
3.3 積・商の微分法 48
3.4 x^n の導関数（整数 n） 50
3.5 合成関数の微分法 51
3.6 逆関数の微分法 53
3.7 x^r の導関数（有理数 r） 53
3.8 曲線の方程式と微分 54
3.9 三角関数の和と積の公式 56

3.10 三角関数の導関数 . . . 58
3.11 指数関数の導関数 . . . 60
3.12 対数関数の導関数 . . . 61
3.13 対数関数の微分法 . . . 63
3.14 x^α の導関数（実数 α） . . . 64
3.15 高次導関数 . . . 65

第 4 章 微分法の応用 69
4.1 接線の方程式 . . . 69
4.2 平均値の定理 . . . 72
4.3 関数の増減 . . . 74
4.4 増減表の書き方（グラフのかき方） . . . 76
4.5 関数の極大・極小 . . . 79
4.6 第２次導関数 . . . 80
4.7 関数の最大・最小 . . . 82
4.8 方程式への応用 . . . 84
4.9 不等式への応用 . . . 86
4.10 速度・加速度 . . . 89
4.11 媒介変数表示 . . . 91
4.12 媒介変数表示と平面上の点の運動 . . . 94
4.13 近似式 . . . 96

第 5 章 積分法 99
5.1 不定積分 . . . 99
5.2 置換積分 . . . 102
5.3 いろいろな置換積分 . . . 104
5.4 部分積分法 . . . 106
5.5 いろいろな不定積分（分数関数） . . . 108
5.6 いろいろな不定積分（無理関数） . . . 110
5.7 いろいろな不定積分（三角関数） . . . 112
5.8 定積分 . . . 113
5.9 定積分の置換積分法 . . . 116
5.10 偶関数と奇関数の定積分 . . . 118
5.11 定積分の部分積分法 . . . 119
5.12 定積分と微分 . . . 121
5.13 区分求積法 . . . 122
5.14 定積分と不等式 . . . 126
5.15 積分の真実 . . . 129

第 6 章 積分法の応用 133
6.1 面積 . . . 133
6.2 y 軸との間の面積 . . . 135
6.3 媒介変数で表された曲線と面積 . . . 136
6.4 体積 . . . 138
6.5 回転体の体積 . . . 141
6.6 曲線の長さ . . . 143
6.7 直線運動 . . . 145
6.8 平面運動 . . . 147

第 7 章　行列　151
7.1　行列とは何か　151
7.2　行列の和、差、実数倍　153
7.3　行列の積　156
7.4　行列の積の性質　159
7.5　零行列と単位行列　161
7.6　A^n の計算　162
7.7　ケーリー・ハミルトンの定理　164
7.8　逆行列　166
7.9　行列の積の逆行列　169
7.10　連立一次方程式（$AX = P$）　170
7.11　連立一次方程式（$AX = O$）　172
7.12　一次変換　172
7.13　逆変換　175
7.14　合成変換　177
7.15　回転移動　178
7.16　固有値　181

第 8 章　二次曲線　187
8.1　方程式の表す曲線　187
8.2　曲線の移動　188
8.3　放物線　190
8.4　楕円　192
8.5　双曲線　195
8.6　二次曲線　198
8.7　二次曲線の平行移動　199
8.8　二次曲線と直線の共有点　201
8.9　二次曲線の接線　203
8.10　媒介変数表示　205
8.11　極座標　207
8.12　極方程式　209
8.13　二次曲線の極方程式　212

序文

高校数学は間違いなく青春である。それは揺るがざる事実である。未だに疑念が晴れない人は、是非とも本書を読んで頂きたい。第一巻、第二巻と同様、本書は形としては高校数学の参考書であるが、その焦点は常に青春という一点に置かれている。本書を読み進めるうち、あまりの感動に号泣を禁じえないであろう。

何度でも繰り返す。数学は面白いだとか、数学は楽しいだとか、数学は美しいだとか。そんな主観的なことを言ったところで、しょせん響かない者には響かないし、また、響かせる必要もない。しかし、数学が青春であることは誰もが認識すべき非常に重要な事実である。特に現役の高校生諸君の場合は、今この時期に理解しておかないと取り返しのつかないことになる。なぜなら、青春は二度とは戻らないものだからである。本書を通じて、一人でも多くの高校生がその青春を力の限り謳歌することを願う。

方手雅塚
Ann Arbor, May 2007

第 1 章

数列の極限

1.1　数列の極限

数列の極限は青春である。それは人生の縮図の青春である。一生懸命勉強をして立派な公務員になるのも人生ならば、会社を興してバンバン儲けるのも一つの人生。仕事を無くし、家族に逃げられ、失意のどん底に沈んでいくのも人生ならば、いつまでも定職につかずに、あっちへフラフラこっちへフラフラするのもまた一つの人生である。そして、これらは全て数列の極限に他ならない。

人生は、果てしなく続く数列である。

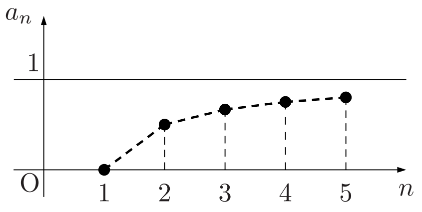
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

このように項が限りなく続く数列のことを**無限数列**というが、問題はその行方、すなわち n を限りなく大きくしていったときに一般項 a_n がどうなるかである。n を限りなく大きくすることを $\boldsymbol{n \to \infty}$ で表せば、それは「$n \to \infty$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の極限がどうなるか」のように言うことができるだろう[*1]。いずれにせよ、人生はどこへ向かうのか、それが問題なのである。

例えば、以下の数列

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \cdots$$

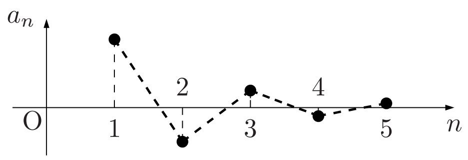
は、$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ ということから、$n \to \infty$ のとき、1 に近づくことがわかる。その様子は下のグラフからも明らかである。



また、次の数列

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots$$

は、$n \to \infty$ のとき、（符号が目まぐるしく変化するが）その大きさは 0 に近づく。その様子は下のグラフのようになる。



[*1] 記号 ∞ は「無限大」と読む。これは数を表しているのではないことに注意せよ。あえて言うならば、止まることなく増え続ける生き物のようなものである。だから、$1 + \infty$ も $2 \times \infty$ も ∞^2 も $\sqrt{\infty}$ も全て ∞ に等しい。

上のいずれの場合も、数列はある一定の値に近づく。その姿は、まるで大企業に就職が決まった大学生のように安定している[*2]。一般に、$n \to \infty$ とすると a_n の値が一定の数 α に限りなく近づくとき、数列 $\{a_n\}$ は α に **収束**[*3] するといって、これを次のように表す。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または、} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha}$$

そして、このとき、α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値（又は極限）**という。

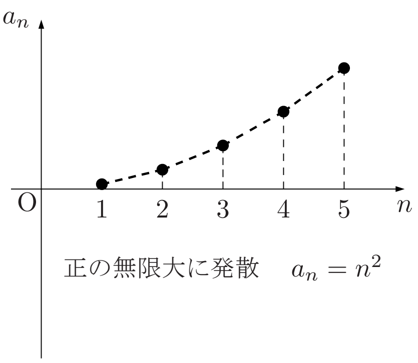
もちろん、どんな数列でも収束するとは限らない。数列が収束しないとき、数列は**発散**するという。例えば、一般項が $a_n = n^2$ で表される数列は、$n \to \infty$ のとき限りなく大きくなる。このようなとき、数列は**正の無限大に発散する**といい、次のように表す。

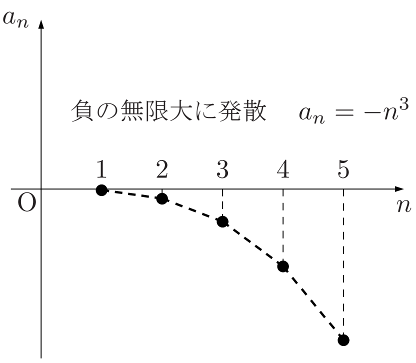
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または、} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \infty}$$

また、$a_n = -n^3$ で表される数列は、負の値をとりながら、その絶対値は限りなく大きくなる。この場合、数列は**負の無限大に発散する**といい、次のように表す。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{または、} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to -\infty}$$

下図を見れば分かるが、正の発散は上がり続ける我社の株価を、負の発散は何もかも失い続けて奈落の底へ向かう人生の急降下を表しているかのようである。数列の極限はやはり人生そのものなのである。





さて、これまでの数列は、ある一定の値に近づいたり、正の無限大へ発散したり、又は負の無限大に発散したりというように、一応はどこかへ向かう数列であった。すなわち、極限は存在した[*4]。では、どこへも向かわない数列などがあるだろうか。ある。例えば、

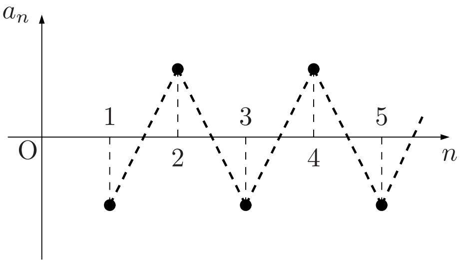
$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$$
$$1,\ -2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \cdots,\ (-2)^{n-1},\ \cdots$$

[*2] 最近では大企業だからといって安定とは限らないそうだが、君はどう思う？

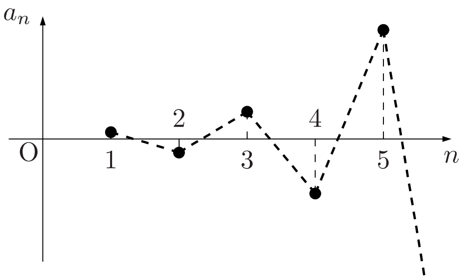
[*3] 「しゅうそく」であり、「しゅうしょく」ではない。

[*4] $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するということである。ちなみに、無限大は数ではないので極限値とはいわない。あくまで数値とは区別して、単に極限という。

などは、$n \to \infty$ のとき、一定の値に収束せず、また、正の無限大にも負の無限大にも発散しない。このような数列は**振動する**という。下図から明らかなように、振動する数列は、同じことを延々と繰り返す学ばない人生、そして、激しいアップダウンを繰り返しながら発散する破滅的な人生を表しているかのようである。



振動　$a_n = (-1)^n$



振動　$a_n = (-2)^{n-1}$

もちろん、この場合は（どこにも向かわないのだから）極限は存在しないと考える。

以上のことから、一般的に、無限数列は次のように分類されることがわかる。

収束 ……………………… $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

発散
- **正の無限大に発散** ……… $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- **負の無限大に発散** ……… $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- **振動（極限無し）**

ここまでくれば、人生が数列であることは明らかである。一定の値に収束するものもあれば、正や負の無限大に発散するものもあり、さらに振動を繰り返すものもある。そして、それらは全て己のさじ加減一つで決まるのである。自分の人生は自分で作り上げるのである。ここで大事なことが一つある。それは、人生の数列はいつでもやり直しがきくということである。そしてそれは間違いなく青春である。受験に失敗して負の無限大に発散しても、後に実業家として正の無限大に発散できればそれでいい。好きな女の子に告白するかどうか、迷いながら振動しても、そのまま気持ちを高揚させて「好きだー！」と発散すればいい。落ち着いて振動しながら、じっくりと今後の進路を模索し、いつの日か立派な一定値に納まればいい。何も急ぐことはないのだ。じっくりと n を大きくしていけばいいのである。早かれ遅かれ、ガツンとかませばいいのである。さあ、これからじっくりと人生の数列を並べていこう。時には振動してもいい。時には発散してもいい。いつの日か、向かうべき場所を見つけ、そこへ情熱的に収束しようじゃないか！

1.2　数列の極限の計算

「あの二人、付き合ってるみたいよ」だとか、「あいつはパンツはかない人だから」だとか、「あの先生、本当は男だから」だとか。根拠もなく、勝手に決めつけてはいけない。そんな安易な一言から噂が広がり、あの二人や、あいつや、あの先生がどれだけの迷惑をこうむるか、少しは考えたほうがいい。実際、思っていたような事実は無かったという場合がほとんどなのである。それは数列の極限の計算でも同じことである。確固たる根拠なく、その極限を決めつけてはいけないのである。

例えば、次の極限を考えよう。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+1}$$

ぱっと見た感じ、明らかに分母も分子も無限大に発散することがわかる。よって、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

などとしてしまいそうである。だが、それは大きな間違いなのである。こんなことを平気でしている人は、まず以下に示す極限の性質を理解しておかなければならない。

数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ が収束して、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるならば、

1. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　　k **は定数**
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$
4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　　$\beta \neq 0$

どれもこれも当たり前のように思えるが、ここで重要なことは、これらの性質は、二つの数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ が収束するときのみ成立するということである。どちらか一方でも無限大に発散するならば、その保証はない。ゆえに、$\frac{\infty}{\infty} = 1$ が成り立つとは限らないのである。では、そのような場合、どのようにして極限を求めればいいか。極限の性質が使えるような式に変形すればいい。例えば、先の極限の場合は分母と分子を n で割ればいい。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$

そうすれば、分子は 3 に、分母は 2 に収束するので、ゆえに極限の性質から、これは $\frac{3}{2}$ に収束するといえる。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$$

やはり、$\frac{\infty}{\infty} = 1$ ではなかったのである[*5]。

このように、安易に決め付けられないような形は**不定形**と呼ばれる。それには以下のようなものがある。

不定形：　$\dfrac{\infty}{\infty}$　$\dfrac{0}{0}$　$0 \times \infty$　$\infty - \infty$

不定形の場合は、その極限を勝手に決めつけてはならない。何とかして不定形を脱却し、正確に求める必要がある。脱却の方法はいくつかある。

●最高次の項でくくる：　次のような場合、

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - n)$$

このままでは $\infty - \infty$ の不定形だが、n^2 でくくると $n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ となり、これは $\infty \times 1$ なので不定形ではない。よって、確信をもって

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty$$

と言える[*6]。

●分母・分子を分母の最高次の項で割る：　次のような場合、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1}$$

[*5] ある意味、分母と分子がともに無限大に発散するとき、その極限は分母・分子の発散の“スピード”によって決まると言えるかもしれない。分子が凄まじい速さ発散すれば無限大に発散し、分母が凄まじい速さで発散すればゼロに収束する。そして、分母と分子が似たような速さで無限大に発散するとき、この例のように、ある一定の数値に収束する。

[*6] n^2 の方が n よりも速く無限大に発散するので、全体としても無限大に発散すると解釈できるだろう。

このままでは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形だが、分母と分子を n で割ると $\dfrac{n-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ となり、これは $\frac{\infty}{1}$ なので不定形ではない。よって、自信を持って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\infty$$

と結論できる[*7]。

●有理化する：　次のような場合、

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

このままでは $\infty-\infty$ の不定形だが、分母と分子に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ を掛ければ、

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

となり、これはもはや不定形ではなく、単純に分母だけが無限大に発散することがわかる（つまりゼロに収束)。よって、胸を張って

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

と主張できる[*8]。

このように、極限の計算は木目の細かい配慮が必要なのである。安易に決めつけてはいけないのである。試しに、「これは $\frac{\infty}{\infty}$ だから、1 なんだよねー」などと安易に決めつけられた数列の身になって考えてみるといい。それがどれだけ理不尽で屈辱的なものか実感できるだろう。ゆえに、付き合ってもないのに付き合ってるとか、毎日元気にパンツをはいているのにはいてないとか、女の先生なのに男の先生だとか、そんなことを安易に言ってはならないのである。どうしても何か言いたいならば、何らかの方法で不定形を脱却し、確実にそう言えるという証拠を見つけることだ。そして、確固たる根拠を基にして主張するべきなのである。とはいえ、この貴重な青春の時代に、そんなつまらないことに時間を費やしているようではいけない。誰が誰と付き合ってもいいじゃないか。あいつがノーパンでもいいじゃないか。先生がオカマでもいいじゃないか。そんな他人のことよりも、自分の青春である。二度とは戻らないこの青春時代をいかにして生きるか。不定形に陥らないように、いかにして青春の日々を変形していくか。それこそが青春の最重要課題である。詮索するのは数列の極限だけで十分だ。さあ、今すぐ多くの数列の極限を求め、抑えきれない詮索欲を満たそう。そして、すっきりとした頭で青春の極限について考えようじゃないか！

1.3　はさみうちの原理

はさみうちの原理は青春である。それは周りに流される青春である。人間は、大なり小なり周りに流されながら生きている。子供の頃には、皆がやるからといって危険なことに挑戦したり。中学生になれば、周りと同じように塾に通ったり。高校生になれば、また周りと同じように大学を目指したり。不本意ながらも、多くの人がそんな流されるままの人生に甘んじている。だが、ちょっとした発想の転換で、それを逆に利用して有意義な人生を送ることができる。はさみうちの原理が、それを我々に教えてくれる。

まずは当たり前のことから始めよう。二つの数列 $\{a_n\}$、 $\{b_n\}$ について、

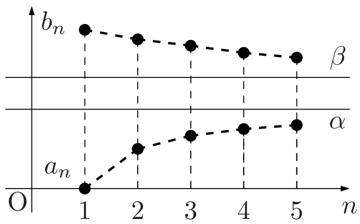
a_n が常に b_n 以下の値をとるとき、$\{a_n\}$ の極限は $\{b_n\}$ の極限を超えることはない。

*7 さっきと同様、n^2 の方が n よりも速く無限大に発散するので、この結果も納得できる。

*8 この場合、結局 $\infty-\infty=0$ となったわけだが、それはあくまでも“たまたま”そうなっただけで、いつもゼロになるとは限らない。

これは当たり前のことである。例えば、この二つの数列が収束する場合、すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき、この当たり前の事実は次のように表される。

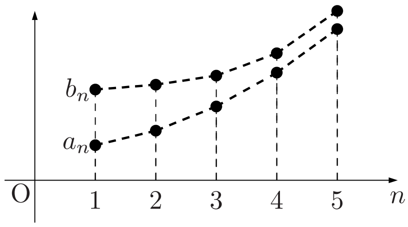
$$\boldsymbol{a_n \leqq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)} \text{ のとき}$$
$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leqq \beta}$$



右図からもわかるように、これは当然のことである[*9]。

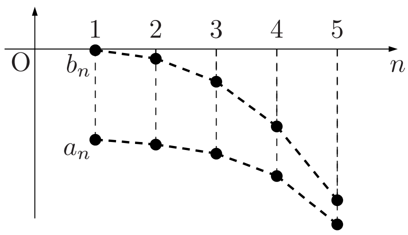
では、収束しない場合はどうなるのか。例えば、a_n が無限大へと発散する場合、すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ の場合。このとき、b_n は a_n に押し上げられるように無限大へと発散していくだろう（下図)。それはまるで、向上心旺盛な後輩の影響を受けて、自らも向上してゆく君の姿のようである。

$$\boldsymbol{a_n \leqq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)} \text{ のとき}$$
$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty}$$



逆に、b_n が負の無限大に発散するとき、a_n はそれに抑え込まれるように負の無限大へと落ちていくだろう（下図)。それはまるで、借金まみれの友人に影響されて同様に財産を失い続ける誰かさんのように。

$$\boldsymbol{a_n \leqq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)} \text{ のとき}$$
$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty}$$



以上のことは、いずれも当たり前のことであるが、実際に、例えば $\frac{(1+h)^n}{n}$ $(h > 0)$ の極限を求めるのに利用できる。二項定理を使って $(1+h)^n$ を展開すれば、

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}\,h^2 + \cdots$$

$h > 0$ より、右辺の項は全て正なので、

$$(1+h)^n \geqq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}\,h^2$$

両辺を n で割れば、

$$\frac{(1+h)^n}{n} \geqq \frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}\,h^2$$

ここで、n を限りなく大きくすると、右辺は無限大に発散することがわかる。ゆえに、左辺も（右辺の数列に押し上げられて）無限大に発散する。つまり、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+h)^n}{n} = \infty$$

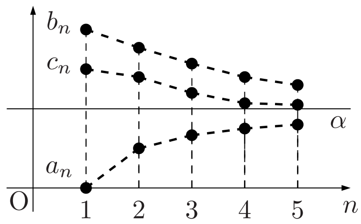
ということがわかる。

[*9] 常に $a_n < b_n$ であっても、$\alpha < \beta$ とはならないことに注意しよう。例えば、$a_n = 1 - \frac{1}{n}$ は常に $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ よりも小さいが、どちらも 1 に収束する。

さて、大事なのはここからである。これまで正や負の無限大に押しやられるところを見てきたが、もちろん、ある特定の値に押しやられる場合も存在する。それが、“はさみうち”である。すなわち、ある数列 $\{c_n\}$ が 常に二つの数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ の間の値をとるとき（はさまれるとき)、もし $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が同じ値に収束するならば、$\{c_n\}$ もその値に収束する（右図参照)。これを **はさみうちの原理** という。

$$\boldsymbol{a_n \leqq c_n \leqq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)} \text{ のとき}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$



例えば、これを用いて $\dfrac{\sin n\pi}{n}$ の極限を求めることができる。まずは、正弦の値は -1 と 1 を超えないことから

$$-1 \leqq \sin n\pi \leqq 1$$

両辺を n で割って

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin n\pi}{n} \leqq \frac{1}{n}$$

このとき、明らかに左右はゼロに収束する。つまり、

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

ゆえに、はさみうちの原理により、それらにはさまれる $\dfrac{\sin n\pi}{n}$ もゼロに収束する。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\pi}{n} = 0$$

はさみうちの原理は、君が君をはさむ二人の友人に流されて、二人が向かう場所へ強制的に向かわされることを示している。二人が不良ならば君も不良に、二人が試験で０点ならば君も試験で０点に、二人がスケベならば君もスケベになるというわけである*10。それはとっても恐ろしいことである。君がブルブルと震えるのも無理はない。しかし、青春の人はこれを怖がってはならない。逆にこれをうまく利用するべきである。すなわち、目標とする場所へ向かう友人を二人見つけ、その二人に自らはさまっていけばいいのである。彼女が欲しいなら、彼女がいる二人の男子にはさまれればいい*11。成績を向上させたければ、優等生の二人にはさまれればいい*12。ミュージシャンになりたければ、ミュージシャンの二人にはさまれればいい*13。いずれにせよ、しっかりとはさまり続ける限り、きっと目標を達成できることだろう。もちろん、はさまれなくとも、下から押し上げられるということも利用できるだろう。要は、自分がそうなりたいと思うような人間に近づく（はさまる）ことである。そして努力を続けることなのである。それはまるで芸人の弟子入りのようだが、まさにそうなのである。青春の夢を実現するには、夢を実現してしまった人間と同じ空気を吸って、得られるものを全て得るのが一番なのである。さあ、もう震えも止まったことだろう。今すぐ家を飛び出して、はさまれるべき誰かを探しに行こう。そして、目標が定まったら、グイグイッと豪快にはさまれよう。一生懸命はさまれ続けて、いつの日か、でっかい青春の夢を実現しようじゃないか！

*10 一般に、まわりに複数の人間がいる場合、まわりが皆不良であるならば、その集団に属する限り、自分も不良のように振舞うことになる。また、まわりが皆優等生であれば、一緒に塾に通ったり、勉強を教えあったりして、結局は自分も優等生に向かって進むことになる。いずれにせよ、人間はまわりと同じように振舞う傾向がある（そうしないとその集団に属せない)。集団に馴染んでいくと言ってもいいだろう。

*11 そうすれば、彼らの彼女を通じて女の子を紹介してもらえるかもしれない。そうでなくても、どうすれば彼女ができるのか、そのヒントを得ることができるかもしれない。

*12 彼らにはさまれ続ける為にも、一生懸命に勉強することだろう。そして、彼らとの勉強会を通じて、お互いの知性を刺激し合ったり、夢を語り合ったりと、素晴らしい青春を送ることができるだろう。

*13 楽器ができなくても、楽譜が読めなくても、まずはミュージシャンに近づくことだ。そして、一生懸命に努力して、しっかりとはさまり続けることだ。

1.4　無限等比数列

近所の喫茶店。その片隅で、君が一心不乱に試験勉強をしている。そこへ二人のサラリーマンがやってきた。彼らは隣の席につき、コーヒーを注文した。二人は意外と大きな声で話し始めるが、君は気にせず参考書を覗き込んでいる。

やがて、二人のサラリーマンのテーブルにコーヒーが運ばれてきた。それをチラリと見た君は、「大人は、やっぱコーヒーなんだなあ」と心の中でつぶやき、再び参考書に視線を戻した。と、そのとき耳に入った二人のサラリーマンの会話に君はビクッとした。「まっ、まさか . . . 」 君は止まったまま、全神経を彼らの会話に集中させていく。

「お前、これで今日はコーヒー何杯目だ？」「5 杯目さ」「それは素晴らしい」「素晴らしい？」「そうさ。まあ俺の話を聞け。コーヒーが 1 日 1 杯ならば、何の変哲もない平凡な人生になるそうだ。そして、1 杯を超えると、人生の喜びというものが限りなく増していくらしい」「本当か？ じゃあ、1 杯未満ならどうなるんだ？」「1 杯未満の場合は、逆に人生が徐々にしぼんでいくそうだ。いずれ何もかも無くなって、ゼロの状態になるらしい」「じゃあ、人に勧められたコーヒーを断るときなんかはどうだ？ それも良くないのか？」「その通りさ。そういうのは -1 杯、マイナス -2 杯などと呼ぶんだが、それはもう最悪の事態だ。人生の山や谷が究極に激しくなっていき、どうにも収拾がつかないことになるんだ」「そうなのか。じゃあ、コーヒーを勧められたら、少しだけでもいいから飲めばいいんだな」「そうだ。-0.8 杯でも -0.1 でもいい、とにかく -1 杯以下は避けるんだ。そうすれば、激しい起伏はなくなって、ゼロの状態に落ち着いていくんだ」「なるほど。考えてみれば、せっかく出されたコーヒーに口もつけないなんて失礼な話だからな」「その通りだな」

1.	コーヒー $>$ 1 杯のとき	喜びが増大
2.	コーヒー $=$ 1 杯のとき	平凡な人生
3.	$\lvert$コーヒー$\rvert$ $<$ 1 杯のとき	ゼロの状態へ
4.	コーヒー $\leqq -1$ 杯のとき	最悪の事態へ

「よし、じゃあ、これからもコーヒーをガンガン飲むとするか」「じゃあ、そろそろ行くか？」「ああ、行こう」

二人のサラリーマンが喫茶店を出て行った。君は口を半開きにしたまま、まだ止まっている。やがて、ゆっくりと顔を下ろし、参考書に目をやる。思った通りピッタリだった。と、その瞬間、君はもの凄い勢いで喫茶店を飛び出していった。

参考書には以下のようなことが書かれていた。

数列 $\{r^n\}$ は、初項 r、公比[*14] r の無限等比数列である。例えば、次のような数列である。

$$r = 3 \;\; \to \;\; 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \cdots\cdots$$
$$r = 0.1 \;\; \to \;\; 0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001,\ \cdots\cdots$$

このとき、前者は無限大に発散するが、後者は 0 に収束することがわかる。一般に、無限等比数列の極限は、公比[*15] r によって分類される。

（1）<u>$r > 1$ のとき</u>：　$r = 1 + h\ (h > 0)$ とおくと、二項定理により、

$$r^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h + \cdots + h^n > 1 + nh$$

よって、$n \to \infty$ のとき、$1 + nh$ は発散し、ゆえに r^n も発散する。つまり、

$$r > 1 \text{ ならば} \quad \lim_{n\to\infty} r^n = \infty$$

---

*14 コーヒー？

*15 コーヒー？

（2）<u>**$r = 1$ のとき**</u>：

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

（3）<u>**$r = 0$ のとき**</u>：

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

（4）<u>**$0 < |r| < 1$ のとき**</u>：　$s = \dfrac{1}{|r|}$ とおくと、$s > 1$ となるので、s^n は無限大に発散する。よって、

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s^n} = 0$$

これは $r = 0$ の場合と同じなので、$r = 0$ も含めれば、次のようになる。

$$|r| < 1 \text{ ならば } \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

（5）<u>**$r = -1$ のとき**</u>：

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

これは振動する。

（6）<u>**$r < -1$ のとき**：</u>　このとき、$r = -|r|$ と表せるので、

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} (-|r|)^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n |r|^n$$

これは符号が交互に変わりながら、絶対値が限りなく大きくなるので、$\{r^n\}$ は振動する。

これらをまとめると次のようになる。

1.	**$r > 1$ のとき**	$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n = \infty}$
2.	**$r = 1$ のとき**	$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n = 1}$
3.	**$|r| < 1$ のとき**	$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n = 0}$
4.	**$r \leqq -1$ のとき**	**振動する**

そして、これはサラリーマンの話とピッタリ一致する。

商店街を駆け抜ける君。あのサラリーマンを追いかけて、一体何をしようというのか。おそらく自分でも分かってはいない。とにかく、じっとしてられなかったのだ。心の高揚を抑えることができず、ただ飛び出すしかなかったのだ。思いもよらない衝撃と感動に襲われたとき、人は走り出す。誰を追いかけるわけでもない。どこに行く当てもない。ただ沸き立つ感情を発散するかのごとく、太陽に向かって走り出すのである。ほら、今、君が二人のサラリーマンの横を走り過ぎていった。青春の衝撃が交差する、ある商店街での出来事であった。

1.5　無限級数

無限級数は青春である。それは、貯めずに貯める青春である。多かれ少なかれ、青春の人はお金を貯めている。それは小学校時代からのお年玉の蓄積かもしれない。または、少しずつ友達から借りてきたお金の蓄積かもしれない[*16]。いずれにせよ、いつの日か大きな買い物をすることを夢見て、少しずつお金を残してきたわけである。し

[*16] おいおい、貯金するのに人から金を借りるなよ。

かし、ここに衝撃の事実がある。なんと、貯金せずとも貯金は増えるのである。嘘だと思うなら、以下を読んでみるがいい。

数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき、その各項を順に加えていった式

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

を **無限級数** という[*17]。もちろん、我々の関心はこれがどのような値になるかである。このとき、これまで学んだ無限数列の知識が役に立つことがわかる。無限級数の初項から第 n 項までの和、**第 n 部分和**、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

を考えたとき、我々が関心のある無限級数の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は、

$$S_\infty \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} S_n$$

と表されるだろう。これは、部分和の作る数列 $\{S_n\}$

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

の極限に他ならない。そう、無限級数の和は“数列の極限”なのである。ゆえに、無限級数の和も数列の極限と同様に収束したり発散したりするわけである。

もしも数列 $\{S_n\}$ が収束して、その極限値が S であるならば、この無碍級数は **収束する** といい、

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

と書き、S をこの無限級数の **和** という。一方、数列 $\{S_n\}$ が発散するとき、この無限級数は **発散する** という。

無限級数の和を求めるには、第 n 部分和 S_n を求めて、その極限を調べればいい。次の無限級数の和を求めてみよう。

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \cdots$$

この級数の第 n 部分和 S_n は次のようになる[*18]。

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}
\end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) = \frac{1}{2}$$

ゆえに、この無限級数は収束し、その和は $\frac{1}{2}$ である。

[*17] これはまさに毎月 a_n 円の貯金を続けていったときの最終的な貯金額を表している。となれば、もちろん、我々の関心はこの無限級数がどのような値になるかである。

[*18] ここで、部分分数分解、$\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ を利用するぞ。

ときに、我々は S_n を調べずに無限級数の和を示すことができる。それには、次に示す当たり前の事実を利用する[*19]。

● $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **が収束する** $\Longrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
● $\{a_n\}$ **が 0 に収束しない** $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **は発散する**

一つは、**無限級数が収束するならば、足されてゆく一つ一つの項 a_n は小さくなっていくはず**だということである[*20]。そしてもう一つは、まさにこの対偶であり、**足していく項 a_n がゼロに近づいていかないと、無限級数は永遠に増え続ける（減り続ける、または振動する）**といってるのである。どちらも当たり前のことであるが、これが意外に便利である。例えば、無限級数

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2 + \cdots$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

は、どちらも a_n が 0 に収束しないので、発散することが一目でわかる。また、無限級数

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \cdots + \frac{2n}{2n+1} + \cdots$$

は、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{n}} = 1$$

となるので（0 に収束しないので）、これもまた発散することがわかる。

さて、それではいよいよ、貯金しなくても貯金が増えることを示そう。ポイントは、逆は必ずしも成り立たないということである。先に、無限級数が収束するならば a_n はゼロに近づいてゆくといったが、その逆は常に成り立たない。すなわち、

「a_n がゼロに近づいてゆく $\Longrightarrow$ 無限級数は収束する」は必ずしも成り立たない

のである。a_n がゼロに近づいていくにもかかわらず、無限級数が発散することが有り得るのである。それは、毎月の貯金額をゼロに近づけていっても全貯金額は限りなく増えてゆくことに他ならない。そんなことが本当に有り得るのか。有り得る。次の無限級数を考えよ。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \cdots$$

明らかに、$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ は 0 に収束する。だが、驚くことに、この無限級数は発散する。これを見るために、まず a_n に有理化をほどこす。

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

---

*19 これら二つの命題はお互いの対偶になっていることに注意。対偶なので二つの真偽は一致する。もちろん、どちらも真である。

*20 証明は簡単である。$n \geqq 2$ のとき、$S_n = S_{n-1} + a_n$ より、

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$\longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

ここで、無限級数が S に収束するならば、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

ゆえに、無限級数が収束するならば、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。

そして、無限級数の部分和 S_n を求める。

$$S_n = (\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1}) + (\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}) + (\cancel{\sqrt{4}} - \cancel{\sqrt{3}}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \cancel{\sqrt{n}}) = \sqrt{n+1} - 1$$

この極限は、明らかに無限大である。

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

すなわち、この無限級数は発散するのである[*21]。毎月の入金をゼロに近づけていっても、銀行口座の貯金額は限りなく増えてゆくのである[*22]。

貯金せずして貯金を増やす。今、君は、それが可能であることを知った。信じられないと言いながらも、君はさっそく明日から、毎月 $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 円ずつの貯金を始めるだろう。金色に輝く青春の億万長者を夢見て

1.6　無限等比級数

駅の改札を出たところ。高校生が十人ほどたむろしている。そこには君の姿も見える。どうやら、同窓会か何かの待ち合わせのようだ。久しぶりに会ったからなのか、かなり盛り上がっている様子だ。すると、そこへ一人の酔っぱらいが近づいてきた。傍まで来ると、その酔っぱらいは見事なアホ面でニッコリ笑い、「兄ちゃんたち、若いねえ」と無邪気に話しかけてきた。関わらないようにと無視を決め込む高校生たちだったが、君は思わず「ええ、若いですよー！」と答えてしまう。アホ面の酔っぱらいは、それに気を良くし、何やら意味のよく分からないことを話し始めた。

「いいねえ、若いってのは。若いときは何でもあるんだよね。学校があーる、学割があーる、遠足もあれば、食欲もあーる。体力もあーるし、知力もあーる。パンツの替えもあれば、ご飯のおかわりもあーる。とにかく、あーる、あーるで、あーるが一杯なんだよねえ。だから、無限の可能性があるんだよねえ。成功して浮かれたり、失敗して悩んだり、何がどうなるかさっぱり分からない。でも、そこが面白いんだよねえ」「そうですかねえ。おじさんも頑張ってくださいよ！」と君は答えるが、友人に「相手にすんなって」とけん制される。アホ面の酔っぱらいは、嬉しそうに話を続ける。「だけど、大人になると何もないんだよねえ。休みがない、髪の毛がない、お肌の張りもなし、金もない。蒙古斑（もうこはん）もなければ、視力も大してないんだよねえ。“あーる”と言えるものなど一つもないんだよね。そんなとき、先が見えるんだよねえ。どこへ向かってるのか、はっきりとわかっちゃうんだよねえ」「へえ、そんなもんなんですかねえ」 そうやってまたアホ面の酔っぱらいの相手をする君。そのとき、全員が揃ったのだろうか、高校生たちが動き出した。まだ何かごちょごちょ話している君を、友人らが強引に引っ張っていく。アホ面の酔っぱらいは、ニッコリと満面の笑みを浮かべて君を見送る。

しばらく歩いたところで、君は何かに気づいた。「あっ、そうか、そうだったのか！」「何だよ急に？」「いや、あのおじさん、全然酔っぱらってなんかいなかったんだ！」「どういうことだよ？」「こういうことさ。まあ聞いてくれ」 そうして、君の話が始まった。

「等比数列を無限に足していったもの

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

を、初項 a、公比 r の **無限等比級数** というだろ。この無限等比級数の収束、発散がまさにそれなんだよ。無限級

[*21] なぜこのようなことになるのか。例えば、一つの項 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ を足したとき、後ろの $-\sqrt{n}$ は、この一つ手前の項の $\sqrt{n}$ とキャンセルして、結局 $\sqrt{n+1}$ だけが残る。n を大きくしていったとき、常にこの部分が残り、それが大きく成長して無限大に飛んでゆくのだ。と考えれば、納得できるかもしれない。

[*22] 多額の入金と同時に多額の出金を同時に行っていると考えればいい。多額の入金と多額の出金を合わせれば、ほぼゼロである。だから、実質的な入金はゼロに収束していく。だが、残高と多額の出金がキャンセルして残高がゼロになったところに、多額の入金がなされるので、残高は常に多額である。今の場合、それは $\sqrt{n+1}$ に相当し、それは限りなく大きくなっていく。つまり、貯金額は限りなく増えてゆく。