青春の高校数学 2

方手雅塚 著

中表紙イラスト 「絶対値さん」 by 方手雅塚

青春の高校数学 2
by
方手雅塚

目次

序文

高校数学はやはり青春である。それはほぼ間違いのない事実である。未だに確信を持てない人は、ぜひ本書を読んで頂きたい。第一巻と同様、本書は形としては高校数学の参考書であるが、その焦点は常に青春という一点に置かれている。本書を読み進めるうち、あまりの感動に涙腺がことごとく破壊されるであろう。

繰り返す。数学は面白いだとか、数学は楽しいだとか、数学は美しいだとか。そんな主観的なことを言ったところで、しょせん響かない者には響かないし、また、響かせる必要もない。しかし、数学が青春であることは誰もが認識すべき非常に重要な事実である。特に現役の高校生諸君の場合は、今この時期に理解しておかないと取り返しのつかないことになる。なぜなら、青春は二度とは戻らないものだからである。本書を通じて、一人でも多くの高校生がその青春を力の限り謳歌することを願う。

方手雅塚

Ann Arbor, May 2007

第 1 章

式の計算と方程式

1.1　整式の除法

整式の除法（割り算）は青春である。それは整数の割り算と同じくらい青春である。だが残念なことに、多くの高校生はその事実に全く気づかずただ割り算が出来ればそれで満足してしまう。そして青春を終える頃にオロオロと見苦しい姿を見せることになる。卒業式での不真面目な態度、そして卒業から数日後の早すぎる同窓会などは、まさにその典型である。それは余りにも悲しく、そして残酷過ぎる光景である。そんな青春の犠牲者をこれ以上増やさない為にも、ここでは整式の除法がどれほど青春なのかを一生懸命解説する。心して学んで頂きたい。

いきなり整式の割り算を計算せよと言われてもどのようにすればいいのか見当もつかないと思うので、まずは諸君もよく知っている整数の割り算から見てみよう。例えば $159 \div 12$ という割り算は以下のようにして計算できることを諸君は知っている。

$$\begin{array}{r}
13\\
12\,\overline{)\,159}\\
12\\ \hline
39\\
36\\ \hline
3
\end{array}$$

重要なことは、12 に何かを掛けたものを引いていき、**高い桁の数字から順に消していく**ということである。そして、**残りの数が 割る数 12 の桁数を下回ったところで割り算は終わり、残った数 3 を余りという**[*1]。それでは、この考え方をそのまま使って整式の割り算 $(x^2+5x+9)\div(x+2)$ を行なってみよう。つまり、$(x+2)$ に何かを掛けたものを引いていき、**次数の高い項から順に消していくのである。** まずは (x^2+5x+9) の x^2 を消すために $(x+2)\times x$ を引いて、次に現れた $3x$ を消すために $(x+2)\times 3$ を引いたりして

$$\begin{array}{r}
x\phantom{{}+5x}+3\\
x+2\,\overline{)\,x^2+5x+9}\\
x^2+2x\phantom{{}+9}\\ \hline
3x+9\\
3x+6\\ \hline
3
\end{array}$$

というように計算できる。やってしまえば何とも単純なことである。ここで、最後の 3 を $x+2$ で割ることはできないことを理解しておこう。言い換えれば、**残りの式が割る側の $x+2$ の次数を下回ったところで割り算は終わり、** その残ったものが余りとなるのである[*2]。さて、ここで何気なく上の筆算で $x=10$ としてみるといい。す

[*1] 1 桁の数字を 2 桁の数字で割ることはできないので、ここで終了。
[*2] 例えば、$x+3$ を x^2+x-1 で割ることはできない。

ると最初に行なった整数の割り算と全く同じものになることが分かるだろう[*3]。そう、整数の割り算と整式の割り算は、ほとんど同じようなものなのである。よって、$159 \div 12 = 13 \cdots 3$ のとき、13 を商、3 を余りと呼ぶように、整式の割り算の場合も、

$(x^2 + 5x + 9)$ を $(x + 2)$ で割ると、商が $x + 3$、余りが 3 である。

などと表現できるだろう。さらに、整数の割り算のときに

$$159 \div 12 = 13 \cdots 3 \quad \longrightarrow \quad 159 = 12 \times 13 + 3$$

と書けるように、整式の割り算の場合も

$$(x^2 + 5x + 9) \div (x + 2) = (x + 3) \cdots 3 \quad \longrightarrow \quad x^2 + 5x + 9 = (x + 2)(x + 3) + 3$$

と書けるだろう。一般に、x についての整式 A を x についての整式 B で割ったときの商を Q、余りを R とすると、次の関係が成り立つ。

$$\boxed{\boldsymbol{A = BQ + R} \qquad \textbf{但し、(}\boldsymbol{R}\textbf{ の次数)} < \textbf{(}\boldsymbol{B}\textbf{ の次数)}}$$

ここで気付こう。「$R = 0$ なら、因数分解じゃないか！」 その通りである。たとえば、$(x^3 + x + 2) \div (x^2 - x + 2)$ を計算してみると、

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x & +1 & & \\ \hline
x^2 - x + 2 & x^3 & & +x & +2 \\
 & x^3 & -x^2 & +2x & \\ \hline
 & & x^2 & -x & +2 \\
 & & x^2 & -x & +2 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

となり[*4]、よって

$$x^3 + x + 2 = (x^2 - x + 2)(x + 1)$$

と因数分解できることになる[*5]。そう、整式の割り算は因数分解にも応用できる非常に重要な演算なのである。これはしっかりとマスターしておこう。

整数の割り算が桁数の高い数字から順に消していくという演算であるのと同様に、整式の除法もまた次数の高い項から消していくという演算である。それはまさに青春の世代交代劇である。高校では高学年から順に青春の舞台から消えてゆく。もっと一般的に言えば、年齢の高い順に青春のマウンドを降りていくということである。その順序が変わることは決して有り得ない。そういう意味から、「整式の割り算は青春の心太（ところてん）である」[*6]などと言われることもあるが、それは余りにも整式をバカにし過ぎである。次数の高い項をどのようにして

[*3] 「おぉー！ すげー！」と思っただろ。ここでは深入りしないが、これは実に興味深いことである。好奇心をそそられた人は、負の係数を持つ整式の割り算と整数の割り算の関係などを考えてみるといいだろう。

[*4] 整式の割り算をするとき、各式を降べきの順に整理し、ある次数の項が存在しないときはその場所を空けておくとよい。これは、整数の場合で言えば、1012 のようにある桁の数が無いときに 0 と書くことに相当する。はっきり言ってしまえば、1012 が $1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2$ であるように、$x^3 + x + 2$ も $1 \times x^3 + 0 \times x^2 + 1 \times x^1 + 2$ であるということである。

[*5] 逆に言えば、余りがゼロになるような整式を見つけることによって因数分解が可能なのである。このような因数分解の方法を、諸君は後に学ぶことになる。

[*6] ところてん式：ところてんを突き出すように，あとから押されて進むこと。何の苦労もしないで，押されるままに進んだり，物事を終えたりすること。例文：「── に大学を卒業する」

消すかは、己の脳ミソをグルグルと回して決定しなければならないことを忘れてはいけない。すなわち、諸君がいつか青春の舞台から姿を消すときの、その消え方は自分自身で決定しなければならないのである。そのときが来てからオロオロしないように、今からしっかりと美しい去り方を考えておこう[*7]。自分の青春の終え方を自分で選べるというのは、青春の時代を誇り高く生きる者の特権なのだから[*8]。

1.2　整式の約数・倍数

「私達、互いに素だったのよ。だから...さよなら！」そう言って、彼女は走り去った。彼女との突然の別れに呆然とする君。青春の夕焼けがメラメラと広がる夕刻のことである。

フラフラと家に戻った君。お父さんが心配して君に声をかける。「どうした？ 何かあったのか？」「父さん、互いに素ってどういう意味？」[*9] 今にも泣きそうな君の顔から、お父さんは全てを理解した[*10]。そして君に優しく語り始めた。「よし、教えてやろう。**互いに素ってのは、その二つの整数の公約数（＝共通の約数＝共通因数＝共通の因数）が 1 以外に無いってことだ。**こういうのは、素因数分解をすればすぐに分かるぞ[*11]。例えば 105 と 286 は、それぞれ素因数分解をすれば

$$3 \times 5 \times 7, \qquad 2 \times 11 \times 13$$

となるだろ。これを一見すれば、共通因数が存在しないことが分かる[*12]。ということで、105 と 286 は互いに素だということが分かるんだ。もう一つ、例えば 312 と 576 の場合は、これらも素因数分解して

$$2^3 \times 3 \times 13, \qquad 2^6 \times 3^2$$

となる。これを見れば、この 2 数には公約数が沢山あることが分かる。2 だとか、3 だとか、2^3 だとか、2×3 だとか。そんなとき、どちらにも含まれる約数の中でも最大のものを最大公約数と言うんだ。この場合、最大公約数は $2^3 \times 3 = 12$ だな[*13]。ちなみに、この 2 数の共通の倍数を公倍数というが、その中でも最小のものを最小公倍数というんだ。それは、現れた素因数を全て（同じ素因数なら次数の高いものを選んで）掛け合わせたものだから、この場合は、$2^6 \times 3^2 \times 13 = 7488$ となる」

どうやら君は理解したようだ[*14]。「そうか、そうだったのか。共通部分が無かったってことなのか...彼女はそれが言いたかったんだ。うぅっ、うぅっ...」改めてガックリする君を見て、お父さんがまた語り始める。「決め付けるのはまだ早いぞ。整式の場合も考えてみようじゃないか。整式にも約数や倍数があるんだ。例えば、二つの整式 $x^2 - 3x + 2$ と $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ を考えてみよう。**約数や倍数を考えるなら、まずは因数分解だ。**これらを一生懸命に因数分解すると、

$$(x-1)(x-2), \qquad (x-1)^2(x-2)(x+3)$$

となる[*15]。後は整数の場合と同じで、**これらの共通因数を抜き出せばそれが最大公約数、そして、現れた因数を全て（同じ因数があれば次数の高いものを選んで）掛け合わせたものが最小公倍数**だから、

$$\begin{aligned} &\text{最大公約数は、} \quad (x-1)(x-2) \\ &\text{最大公倍数は、} \quad (x-1)^2(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

ということになる。どうだ、簡単だろ！」だが君は、共通部分が無かったということが相当ショックだったようで、目を真っ赤にして涙ぐんでいる。「泣くんじゃない！ ここからが大事なところだ。よく聞くんだ！ 整式の場

[*7] 特に卒業式での態度は非常に重要なポイントになるだろう。
[*8] かつて切腹は武士にのみ許された特権だったことを考えれば、青春の終え方について無限の選択肢がある諸君は究極の特権階級に属していると言えよう。
[*9] おいおい、知らなかったのかよ！
[*10] さすが親子だ。家族っていいなあ。
[*11] ところで、因数＝約数であり、英語で言えばどちらも Factor である。なぜ日本語では二つの異なる言い方が存在するのだろうか。
[*12] 共通因数、言い換えれば公約数、つまり 2 数のどちらも割ることのできる数字は 1 以外にない。
[*13] このことから、「最大公約数が 1 ならば二つの整数は互いに素である」という言い方が出来ることに気づく。
[*14] こんなことは中学校で学んでいるはずじゃないか！
[*15] $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ の因数分解の仕方は、いずれ学ぶことになる。ここでは魔法を使ったということにしておこう。はっはっは！

合も互いに素という言葉を使うんだ。だが、それは整数の場合と少し違うんだ。例えば二つの整式 $2x^2+10x+12$ と $2x^2+28x+96$ の場合、これらを因数分解すると、

$$2(x+2)(x+3), \qquad 2(x+6)(x+8)$$

となる。このとき、この二つの整式は互いに素なんだ」「えっ？ でも、どっちも 2 という公約数を持ってるよ」「そうだ、その通りだ。しかし整式の場合は違うんだ。

１次以上の公約数を持たないとき、二つの整式は互いに素であるという

と決まっているんだ。つまり、定数の公約数があってもそれは公約数と見なさないんだ。あくまでも、整式（x の式）の形をした因数で考えるということだ。だから 1 次以上の因数が無ければ互いに素だと言われてしまうんだ。ということは、」「あっ！」「そうだ！ 逆に言えば、互いに素だと言っても実は定数としての公約数はあるかもしれないってことだ。ひょっとしたら、彼女はお前にそこまで気づいて欲しかったのかもしれないぞ。更に、ここで上の式に $x=10$ を代入してみろ[*16]。すると二つの整式は、まさに最初の例で使った二つの整数 312 と 576 になるだろ。「あぁー！」「そうさ、そうすれば公約数が沢山できて、互いに素じゃなくなるだろ。それは、何とかすれば二人はまだやり直せるということを意味している。きっと彼女はそこまで考えて互いに素という言葉を使ったに違いない。さあ、行ってやれ。きっと彼女は待っているはずだ。さあ！」「うっ、うん！ ありがとう、父さん！」そういって君は元気に家を飛び出した。やはり彼女は待っていた。メラメラと燃える青春の夕焼けをバックに影を重ねる君と彼女。それを見て涙するお父さん。真っ赤な青春の夜の出来事であった。

1.3　分数式の計算

小学校の頃、クラスに彫りの深い男の子がいた。君は彼の名前を思い出せない。だが、彼が巻き起こした騒動は今でも覚えている。他愛のないことだと誰もが思っていた。高校で分数式を学ぶまでは...

高校での数学の授業。先生が分数式の解説をしている。「ここまで来れば気づいているだろうけども、整式ってのは整数のようなものだ。因数分解したり、最大公約数や最小公倍数を求めたりということが同じようにできるんだから。となれば、次は分数はどうかと思うのが自然な流れだろう。分数というのは割り算のことだが、例えば整数の場合は

$$3 \div 5 = \frac{3}{5}$$

というように、割られる数字を上に、割る数字を下に書いて、それぞれを分子・分母と呼ぶんだなよな。そして、整数と分数を合わせて有理数と呼ぶことにしたわけだ。ここまでは、お前達も知っているはずだ。実は、これらのことはそのまま整式にも当てはまるんだ。例えば、

$$(x^2+4x+3) \div (x^2-x-12) = \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-12}$$

と書いて、これを**分数式**と呼ぶ[*17]。もちろん、上の x^2+4x+3 は分子、下の x^2-x-12 は分母と呼ぶ。そして、**整式と分数式を合わせて有理式**と呼ぶんだ」

君は退屈だった。それもそのはず、分数式の計算というのは特に真新しいものではない。例えば、分数の計算と同じように

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{A \times C}}{\boldsymbol{B \times C}} \qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{A \div C}}{\boldsymbol{B \div C}}}$$

という性質が成り立つことから、

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-12} = \frac{(x+1)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-4)} = \frac{x+1}{x-4}$$

*16 $2(x+2)(x+3) = 2\cdot 12\cdot 13 = 312$、$2(x+6)(x+8) = 2\cdot 16\cdot 18 = 576$。

*17 一般に、分母が定数でない整式のとき、これを分数式という。

というように、**分数式でも約分や通分ができる**だとか[*18]。乗法や除法も、分数の場合と同様に

$$\boxed{\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}\qquad\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}}$$

という性質が成り立つので、例えば

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2x^2-3x-2}\div\frac{x^2-1}{x-2}\times\frac{2x+1}{x-3}&=\frac{x+1}{2x^2-3x-2}\times\frac{x-2}{x^2-1}\times\frac{2x+1}{x-3}\\&=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(2x+1)}\cancel{(x-2)}}\times\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}\times\frac{\cancel{2x+1}}{x-3}\\&=\frac{1}{(x-1)(x-3)}\end{aligned}$$

という計算ができるだとか。どれもこれも、難しいと言うわけではなく、ただ計算が面倒なだけである。君は溜息をついた。ちょうどそのとき先生が「じゃあ最後に分数式の加法・減法をやっておこう。これも分数の場合と同じで、**分母が同じであれば分数式は次のように 1 つにまとめられる**ということだ。

$$\boxed{\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}=\frac{A\pm B}{C}}$$

だから例えば、

$$\begin{aligned}\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x+1}&=\frac{3(x+1)}{(x-3)(x+1)}+\frac{x-3}{(x-3)(x+1)}\\&=\frac{3(x+1)+x-3}{(x-3)(x+1)}=\frac{4x}{(x-3)(x+1)}\end{aligned}$$

というように計算ができるわけだ。どうだ、分かったか？」 その計算を見た瞬間、君の中で小学校時代の記憶が鮮明に蘇った！

　小学校の算数の時間。みんなで分数の足し算を勉強している。先生が「分母が違う数字のときは、通分をして足しましょう！ 例えば、$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ は、それぞれ

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{3}\qquad\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}$$

とすればどちらも分母が 6 になって、

$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

となりますね！」 するとそのとき、一番後ろに座っていた彫りの深い男の子が立ち上がった。「せんせい、それは結局こういうことになるんじゃないですか。**分母同士を掛けて下に、そして分子と分母をたすき掛けしたものを上に**、つまり、

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{\begin{matrix}1 & & 1\\ 2 & \times & 3\end{matrix}}{2\times 3}=\frac{1\times 3+1\times 2}{6}=\frac{5}{6}$$

と計算できる。これを一般的に表せば、

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{\begin{matrix}a & & c\\ b & \times & d\end{matrix}}{b\times d}=\frac{ad+bc}{bd}}$$

となりますが、どうですか。こうやって考えた方が簡単じゃないですか？」 意外な指摘に動揺したのか、先生は真面目に取り合わなかった。「そんなのはダメ。一つ一つきちんと考えなきゃダメです。$\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{3}$ に何を掛けて分母

[*18] ちなみに、分数の場合と同様に、それ以上約分できない分数式は**既約**と呼ばれる。

を同じにするのか。それをきちん考えて計算するのです！」「でも、結局は同じことじゃないですか！ なぜダメなんですか！」「ダメなものはダメなんです！」「なんだそれは！ 根拠を述べろ！ 理不尽だぞ！」「生意気言うんじゃないわよー！」 そうやって、先生と彫りの深い男の子が激しいバトルを繰り広げる。しばらくして、それを見かねた優等生のＡ君が止めに入った。「やめろよー！ 先生に向かって何てことを言うんだ！ 君の言うことも分かるけど、でも、君の方法には欠点がある。それは、後で約分をしなきゃならないことだ。例えば、$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ だったら

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}\times\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{4}}{2\times 4}=\frac{1\times 4+1\times 2}{8}=\frac{6}{8}$$

となるわけだろ。でも、これ、最後に 2 で約分して $\frac{3}{4}$ としなきゃダメじゃないか。先生のやり方なら、$\frac{1}{2}$ の 2 を 4 にすればいいだけだから

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

となって、一発で答えが出るじゃないか。君のやり方は少し手間が掛かるんだよ」[*19] さすがに優等生の言うことには説得力があるのか、クラスのみんなも「おぉー！ そうなんだー。すげー！」などと感心している。優等生を味方に付けて、先生も上機嫌である。納得できない彫りの深い男の子は、「お前らみんなオカシイぞー！こんな理不尽がまかり通っていいのかー！ チキショー！」と叫び、教室を飛び出した。そして二度とクラスに戻ることはなかった。

はっと我に返った君は、興奮気味に、彫りの深い男の子の方法を分数式の加法に応用した。

$$\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x+1}=\frac{\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{x-3}\times\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{x+1}}{(x-3)(x+1)}=\frac{3(x+1)+x-3}{(x-3)(x+1)}=\frac{4x}{(x-3)(x+1)}$$

「はっ、早い！」 君は驚いた。分数のときはそれほど便利だと思えなかった方法が、分数式になればとっても便利なのである。特に、**何を掛けて通分すればいいかを考えることもなくいきなり計算ができる**ところに感心した[*20]。その確信を高めるために、君は様々な計算を試みる。例えば、減法を加法に直して

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1}=\frac{(x+1)-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$$

「おぉー！」 また、例えば分母がなければ分母を 1 にして、

$$x+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x}{1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x(x-1)+(x+1)}{x-1}=\frac{x^2+1}{x-1}$$

「凄い、凄すぎる！ そうか、そうだったのか！」

どうやら君は気づいたようだ。そう、簡単なことは頑張れば出来るが、事が複雑になってくると**出来る限り頑張らなくても良い方法**が大変重要になってくるのである。例えば引越しで多くの荷物を運び込むとき、各自が一つの荷物を持って運び込むというやり方は、一人一人の体力の消耗が激しく非常に大変である。そんなときは、一定の間隔に並んでリレーする方が効率的である[*21]。そして、その差は荷物が多い時にこそ実感できるだろう。更にもう一つ重要な点は、**一度原理を理解してしまえば後は便利な解釈を利用すればいい**というところである。例えば、中学で「移項」なるものを学んだことと思うが、あれはまさに解釈である。本来ならば方程式の両辺に同じものを足したりしなければならないところを、「項をイコールの向こう側に持っていったら符号が変わる」と解釈して計算を進めるのである。すなわち、

$$x-3=0 \quad \longrightarrow x=3$$

[*19] 普通のやり方でも後で約分をしなければならないときはある。例えば $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ を計算してみればわかる。さらに、彫りの深い男の子のやり方でも、まず二つの分母の最小公倍数を求めてからタスキ掛けを行なえばいい。即ち、彼の方法は全く劣っていないのである。優等生の言うことを鵜呑みにしてはいけない。

[*20] 分数の計算を（あれこれ考えることなく）機械的に行なえるのである。これは本当に便利である。

[*21] 動かなくて済むから体力の消耗もかなり抑えられる。

という計算は、本当は「両辺に 3 を足した」と言わなければならないところを「-3 を移項した」と言ってしまうわけである。このようなものはしばしば小ネタと呼ばれる。例えば下のような 2 重分数は

$$\frac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}} = \frac{d}{c} \div \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \times \frac{a}{b} = \frac{ad}{bc}$$

となるので、結局のところ、**内側同士を掛けて分母、外側同士（一番上と一番下）を掛けて分子にすればいい**ということが分かる*22。そして、これをネタとして覚えておくわけである*23。彫りの深い男の子は、こんな素敵な小ネタを小学生で見出していたのである。長い年月を経て、君はそのことにやっと気づいた。なぜあのとき彼をかばってあげなかったのか...　今となっては悔やんでも悔やみきれない、青春のリグレットであった*24。

1.4　恒等式とは何か

恒等式は青春である。それは揺るがざる事実である。しかし、その事実を知る者は少ない。知らないだけならまだいい。ひどいのは、方程式を青春だと思い込んでしまうことである。正解だとか不正解だとか、答えは一つだとか二つだとか、青春はそんな心の狭いものではない。そんな偏狭な思い込みが原因で、楽しめるはずの青春を楽しめない若者がどれだけ多いことか。そんな若者を救済するという意味も込めて、ここでは恒等式の真実を明らかにする。

簡単に言えば、**恒等式とは両辺が全く同じであるような等式**のことである。例えば、

$$x^2 + x = x(x+1)$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$$

などは、左辺を変形すれば右辺と全く同じになるので恒等式である。また、中学三年や高校一年で学んだ乗法公式*25や因数分解の公式も全て恒等式である。ここで、左辺と右辺が全く同じということから以下のことが言える。

$$\boxed{\boldsymbol{ax+b=a'x+b'}\ \textbf{が}\ \boldsymbol{x}\ \textbf{についての恒等式} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a=a',\ b=b'}}$$

要するに、恒等式ならば係数がすべて等しくなるというわけである。もちろん、これは上のような 1 次式だけでなく 2 次式や 3 次式など一般的に言えることである。このことは、特に

$$\boxed{\boldsymbol{ax+b=0}\ \textbf{が}\ \boldsymbol{x}\ \textbf{についての恒等式} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a=0,\ b=0}}$$

などと表されることもある。恒等式については、諸君はしばしば以下のような問題に出くわす。

$a(x+2)+b(x-3)=3x+1$ が x についての恒等式になるように、定数 a、b を求めよ*26。

これは、まず左辺を x について整理して

$$(a+b)x+(2a-3b)=3x+1$$

とし、左辺と右辺の係数を比較して

$$a+b=3,\ \ 2a-3b=1$$

この連立方程式を a と b について解けばいい。答えは、$a=2$、$b=1$ である*27。

*22 一つをまたいで約分できることも分かるだろ。
*23 このような小ネタをいっぱい探そう。ネタをたくさん見つけると、数学も楽しくなってくるぞ。
*24 regret: 後悔、残念、痛恨
*25 $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$ など。
*26 これは、「$\frac{3x+1}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$ が x についての恒等式になるように定数 a、b を求めよ」という問題と同じである。これは、一つの分数を二つの分数の和に変形する問題であり、部分分数分解などと呼ばれる。
*27 この方法は**係数比較法**と呼ばれる。

さて、恒等式のどこが青春なのか。それに気づくには、恒等式を違う角度から見る必要がある。恒等式は両辺が全く同じであるような等式だと言ったが、言い換えれば、それは**両辺を整理すると $\mathbf{0 = 0}$ となってしまうような等式**のことである。例えば、$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ は、全てを左辺に移項して整理すれば

$$\begin{aligned} & x^2 - 1 - (x+1)(x-1) = 0 \\ \longrightarrow \quad & x^2 - 1 - (x^2 - 1) = 0 \\ \longrightarrow \quad & 0 = 0 \end{aligned}$$

となる。これは等式 $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ が**全ての $\boldsymbol{x}$ の値に対して成立する**ことを意味している。つまり、**恒等式とは全ての $\boldsymbol{x}$ の値に対して成立する式**なのである。これとは対照的に、**方程式はある $\boldsymbol{x}$ の値に対してのみ成立する式**である。例えば、方程式 $3x - 1 = 2x + 3$ を整理していくと

$$\begin{aligned} & 3x - 1 = 2x + 3 \\ \longrightarrow \quad & 3x - 2x = 3 + 1 \\ \longrightarrow \quad & x = 4 \end{aligned}$$

即ち、この式は $x = 4$ のときしか成立しないのである。この違いは大変重要である。例えば、この考え方を利用すれば、先の問題を驚くほど簡単に解くことができる。即ち、以下の式が恒等式であるなら、

$$a(x+2) + b(x-3) = 3x + 1$$

これは如何なる x の値に対しても成立するはずなので、例えば両辺に $x = 3$ を代入してみれば、

$$\begin{aligned} & 5a = 10 \\ \longrightarrow \quad & a = 2 \end{aligned}$$

一方、$x = -2$ でも成立するはずなので、これを代入して

$$\begin{aligned} & -5b = -5 \\ \longrightarrow \quad & b = 1 \end{aligned}$$

というように、連立方程式を解くまでもなくあっさりと答えが出る*28。

全ての値に対して成立するのが恒等式である。この考え方は、方程式と恒等式の関係を理解するのに大変役立つ。また、この考え方を利用して、驚くほど簡単に恒等式に関する問題を解くこともできる*29。だが何よりも素晴らしいのは、この考え方は恒等式が青春であることを如実に物語っているということである。全てについて成立、即ち全ての高校生について青春が成立するというのである。青春の形（等式）は様々だとしても、それは誰にでも（どんな x の値でも）成立し得るというわけである。ドラマチックな出会い、映画のような恋、甲子園での劇的な勝利など、そのような青春は誰にでも起こり得るのである。にもかかわらず、多くの若者が方程式を青春だと勘違いし、「そんな映画みたいな恋できるわけないんだよね。青春なんて、いわば映画の中でのみ成立する方程式なんだよね」などと、知ったようなことを口にする。そうやって、掴める青春を掴もうともせずに二度とは戻らない青春の日々を終えてしまう。なんとも悲しいことである。だが、ここまで読んで恒等式を真に理解した君はもう大丈夫だ。さあ、おしゃれをして街へ繰り出そう。そして見知らぬ女の子に声をかけまくってドラマチックな出会いを作り出そう*30！

1.5　等式の証明

年上人間を敬うのは青春である。それは揺るぎない事実である。長く生きるということは凄いことである。あらゆる危険をかいくぐり、常に自分よりも長く生き延びているのである。だが、年上人間の凄さはそれだけではない。彼らは様々なノウハウを身に付けている。それは過酷な青春を生き延びた彼らの蓄積である。若者がそれを

*28 この方法は**数値代入法**と呼ばれる。代入する値は、都合の良いものを自分で勝手に選べばよい。ちなみに、代入する値は求めたい定数の数だけ必要である。例えば今の場合、a と b の二つを求めたいので代入する値は二つで十分である。

*29 簡単に解けないときもあるが、それは許してやってくれ。

*30 じっとしていても青春はやって来ない。一応、自分からアクションを起こす必要はあるだろう。頑張れ！

手に入れることは大変困難であり、とても時間のかかることである。だからこそ、若者は年上人間に対して謙虚でなければならない。以下のエピソードをじっくりと読んでもらおう。

ある数学の授業。先生は断言した。「等式を証明する方法は三通り、

(A)　左辺を変形して右辺になることを（又は右辺が左辺になることを）示す。
(B)　左辺 − 右辺 = 0 を示す。
(C)　左辺と右辺をそれぞれ変形して同じ式になることを示す。

これが全てだ[*31]。これだけ覚えていればどんな等式でも証明できるんだ」 そしていきなり教科書の練習問題をやらされることになった。「この三つのどれかを使えば必ずできるからな。ちゃっちゃとやってしまえよー」と先生は軽く言うが、生徒達は少々不安なようである。確かに等式の証明など簡単なことだ。「三つの方法」などと言っても、どれも考えてみれば当たり前のことである。だが、なぜか 100 %確信できない。

取り敢えず問題を見てみると、最初の問題は

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy \quad \text{を証明せよ。}$$

というものであった。これは (A) の方法で簡単に証明できる。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (x+y)^2-(x-y)^2\\
&= (x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)\\
&= x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2\\
&= 4xy = \text{右辺}
\end{aligned}$$

つまり、左辺＝右辺となって等式は証明できた。「なんだ、本当に簡単なんだな」 生徒達は少しホッとしたようで、そのまま次の問題へと進んだ。

$$a+b+c=0 \text{ のとき、 } a^3+b^3+c^3=3abc \text{ を証明せよ。}$$

問題を見るや否や、すぐに生徒から質問が飛んだ。「なんだこれは。二つも式があるじゃないか。一体どうやればいいというんだ、分からないじゃないか！ せんせーい！」先生はひょうひょうと答える。「ああ、それは条件付きの等式だよ。そういうときは、条件式 $a+b+c=0$ から、$c=-a-b$ として、それを代入して c を消去すればいいんだよ。要するに、**条件付きの場合はその条件式を代入すればいい**だけだ。基本は、やっぱり先の三つの方法なんだよ」例えば (B) の形で証明するなら、

$$\text{左辺}-\text{右辺}=a^3+b^3+c^3-3abc$$

とおいて、ここに $c=-a-b$ を代入して

$$\begin{aligned}
\text{左辺}-\text{右辺} &= a^3+b^3+(-a-b)^3-3ab(-a-b)\\
&= a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)\\
&= a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3+3a^2b+3ab^2\\
&= 0
\end{aligned}$$

となり、左辺＝右辺となって等式は証明できた。生徒らは「それならそうと最初に教えてくださいよ。三つの方法を知っているだけじゃダメじゃないですか！」と先生に不満をぶつけるが、先生はブツブツと独り言を言いながら軽く無視である[*32]。しょうがないので次の問題に取り掛かる。

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ のとき、 } \frac{a+c}{b+d}=\frac{a^2d}{b^2c} \text{ を証明せよ。}$$

[*31] もう一つ、左辺÷右辺＝ 1 を示すというのもあるが、あまり使うことはないだろう。

[*32] 先生の独り言を参考までに記しておこう。「代入もいいが、因数分解したらもっと簡単なんだよなー。つまり、

$$\text{左辺}-\text{右辺}=a^3+b^3+c^3-3abc=\cancel{(a+b+c)}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

ってなもんでね。だけど、この因数分解ができる奴なんてそう居ないからなあ。説明したところで余計に混乱してしまうかもしれないし、ここは黙っておこう。俺って生徒思いの良い先生だなあー。フッフッフ」

これも条件付きだが、その条件が分数なので代入するのも少々面倒くさい。生徒達はまた不満を口にする。「これもやっぱ代入するんですか？ なんか邪魔くさいんですけどー」先生はまたひょうひょうと答える。「ああ、これは条件が**比例式**[*33]のやつだな。**条件が比例式の場合は、比の値を k とおいてみればいい**んだよ」つまり、$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおいて、

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \quad \longrightarrow \quad a=bk,\ c=dk$$

とする。これを左辺と右辺に代入すれば、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k\cancel{(b+d)}}{\cancel{b+d}}=k \\ \text{右辺} &= \frac{a^2d}{b^2c}=\frac{(bk)^2d}{b^2(dk)}=\frac{\cancel{b^2}k^2\cancel{d}}{\cancel{b^2}\cancel{d}k}=k \end{aligned}$$

となり、どちらも同じ k になるので証明完了である。つまり、(C) の方法だ。生徒達はまた「だから、そういうことは最初から教えてくださいよ！ 何が三つの方法を覚えれば十分ですか。十分じゃないじゃないですか！」などと言いながら憤慨している。先生は、やっぱり軽く無視である。

無視するのはどうかと思うが、この先生はなかなか立派な先生である。先生は最初に「この三つが全てだ」と言った。それは間違いなく正しい。事実、上の三つの問題は全てその三つを使って証明できた。問題は、実際に証明を進める際の技術的問題であった。即ち、何をするべきかは分かっているが（例えば「左辺－右辺＝ 0 を示す」）、どのようにすればいいのかが分からなかったのである（代入するとか、$= k$ とおくとか）。それはしばしばノウハウと呼ばれるものである。単純にコツと言ってもいいかもしれない。これは重要なコンセプトである。例えば、車や飛行機の原理は誰でも知っているが、実際に作るとなるとナカナカ簡単にはいかないだろう。また、ミートスパゲッティーの作り方は誰でも知っているが、高級イタリアンレストランのミートスパゲッティーを再現するのは至難の業だろう。これらはまさにノウハウが無いからである。ノウハウというのは、経験豊富なベテランから学ぶか、又は自分自身で失敗を繰り返しながら学ぶしかない[*34]。それほどまでに貴重な知識なのである。人間はノウハウを吸収して成長していく。それは、年上の人間ほど多くのノウハウを身に付けているということに他ならない。だからこそ年功序列というものが存在するのである。年上人間をバカにしてはいけない。謙虚な態度で年上人間から多くのノウハウを学ぼう。反抗するだけが青春ではない。年上人間を敬うのも立派な青春なのである。

1.6　不等式の証明

昔を懐かしむことは青春である。すでに青春を終えた大人達にとって、それは甘酸っぱい思い出に酔う至極のひとときである。一方、現在青春中の諸君にとっては、それは新たな青春を生み出すチャンスとなる。よく「若者が昔を懐かしむなんておかしい。後ろを振り向かないのが青春じゃないか」などと主張する人がいるが、それは大きな間違いである。若者が昔を懐かしむのは非常に有意義なことである。不等式の証明を考えてみればそのことがすぐに分かる。

不等式の証明の基本は、

$$\boxed{\boldsymbol{a > b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b > 0}}$$

である。要するに、二つのものの大小を調べるには、**引いてゼロより大きくなるかどうかを調べればよい**[*35]。例

[*33] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のように、**比の値が等しいことを示す等式を比例式という**。ちなみに、$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$ のように、三つの比が等しいとき、これを

$$a:b:c=p:q:r$$

など書く。そして、$a:b:c$ を、a、b、c の**連比**などと呼ぶ。

[*34] 先生はそのノウハウを惜しみなく生徒達に伝えた。

[*35] もちろん、**割って 1 より大きいかどうかを調べてもいい**。ただ、ほとんどの場合は引き算で十分だと思うぞ。

えば、$a>3$、$b>3$ のとき、$ab+9>3(a+b)$ であることを証明してみよう。さっそく左辺と右辺の差をとって、

$$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺} &= ab+9-3(a+b)\\ &= ab+9-3a-3b\\ &= (a-3)(b-3)>0 \qquad \Longleftarrow (a>3\text{、}b>3\text{ だから})\end{aligned}$$

よって、左辺 > 右辺であることが証明された。もちろん、こんなに単純じゃない不等式もあるだろう。例えば、

$$a^2+4ab+5b^2 \geqq 0$$

などは、どのようにして証明すればいいのかちょっと分からない。そんなときは焦らずに、ソファーに身を沈めて、ゆっくりと昔を思い出してみよう。中学一年生。長い小学校生活から脱却し、少し大人になったような気分になる時期だ。この時点で諸君は算数を卒業し、本格的に数学というものを学び始める。まず学んだのは、負の値であった。マイナスの値を導入し、「今日は私の誕生日です。私は -1 才若返りました！ キャハハハハ！」などと言って無邪気に遊んだ日々が思い出される。そして、$(-2)\times(-3)=6$ などの計算、つまり「マイナス × マイナス ＝ プラス」であることを学んだことを思い出す。すると、「ということは、どんな実数でも 2 乗すればプラスじゃないか！」ということに気づく。即ち、

$$\boxed{\boldsymbol{a}\textbf{ が実数ならば、}\quad \boldsymbol{a^2 \geqq 0}}$$

等号は $a=0$ のときに成立する。 一言で言えば、**実数の 2 乗は決して負にはならない**というわけである。さらに、「ということは、2 乗のものをいくら足してもプラスということか！」ということにも気づくだろう。

$$\boxed{\boldsymbol{a}\text{、}\boldsymbol{b}\textbf{ が実数ならば、}\quad \boldsymbol{a^2+b^2 \geqq 0}}$$

等号は、$a=0$ かつ $b=0$ のときに成立する。そうして、この考え方を応用して、先ほどの不等式は平方完成をすることで簡単に証明できることに気づく。

$$\begin{aligned}a^2+4ab+5b^2 &= \left\{(a+2b)^2-4b^2\right\}+5b^2\\ &= (a+2b)^2+b^2 \geqq 0\end{aligned}$$

等号は、$a=0$ かつ $b=0$ のときに成立する。見事なものである。

また、諸君はときどき以下のような不等式にも出会うだろう。$a>0$、$b>0$ のとき、

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

これはどのようにして証明すればいいのだろうか。ここでもまた、落ち着いて昔を思い出してみよう。中学三年生。生まれて初めて受験生と呼ばれる時期である。と同時に、試験で点が取れる者と取れない者が別の道を歩むことに疑問を抱いたりする頃である。その頃、諸君は重要な因数分解の公式を学んだ。例えば

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

という公式を「和と差の積は 2 乗引く 2 乗」というように言葉で覚えたことが昨日のように思い出される。すると、「あっ！ a、b がともに正の数のとき、$(a+b)$ も正だ。だから、この公式は a^2-b^2 の符号と $a-b$ の符号は一致すること、即ち、a と b の大小と a^2 と b^2 の大小は一致することを意味してるんじゃないか！」と気づく。つまり、$a>0$、$b>0$ のとき、

$$\boxed{\boldsymbol{a>b \quad\Longleftrightarrow\quad a^2>b^2}}$$

ということだ[*36]。簡単に言えば、**どちらも正であれば 2 乗したものの大小を調べても良い**ということである。こ

[*36] $a=b$ のときも含めたければ、等号をつけて

$$a\geqq b \quad\Longleftrightarrow\quad a^2\geqq b^2$$

とすればいい。なお、$a<0$ や $b<0$ ならば、$a>b \quad\Longleftrightarrow\quad a^2<b^2$ となることにも気づいておこう。

の考え方を利用すれば、先の不等式は

$$\begin{aligned} \text{左辺}^2 - \text{右辺}^2 &= (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2 \\ &= a + 2\sqrt{ab} + b - a - b \\ &= 2\sqrt{ab} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに、左辺 $-$ 右辺 > 0。つまり証明終了。これまた見事な証明である。

さらに、時には以下のような不等式を証明したくなることもあるだろう。

$$|a+b| \leqq |a| + |b|$$

そんなときはまず高校一年生の頃を思い出そう。受験戦争に勝利し、本格的な青春の時代が始まる時期である。高校数学といっても、最初の頃は中学数学に毛が生えた程度のものだった。絶対値などは全く同じことの繰り返しだったが、少しフォーマルに、絶対値の外し方として

$$|a| = \begin{cases} a & a \geqq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

というような式で学んだことが思い出される。すると、「あっ！ 絶対値ってのは絶対にゼロ以上の値なんだから、

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| \geqq \boldsymbol{a} \quad \textbf{等号は } \boldsymbol{a} \geqq \boldsymbol{0} \textbf{ のとき}}$$

ということになるじゃないか。そしてもちろん、

$$\boxed{|\boldsymbol{a}|^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{2}}}$$

だ。さらに、

$$|ab|^2 = (ab)^2 = a^2b^2 = |a|^2|b|^2 = (|a||b|)^2$$

だから、

$$\boxed{|\boldsymbol{ab}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

じゃないか！ 今までこんなのを意識したことがないけど、これって結構キレイじゃないか！」というような発見をするだろう。これだけのネタがあれば、先の不等式などは、勇気を持って両辺の 2 乗の差を計算していけば、

$$\begin{aligned} \text{右辺}^2 - \text{左辺}^2 &= (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \end{aligned}$$

ここで、$|ab| \geqq ab$ なので[*37]、

$$\text{右辺}^2 - \text{左辺}^2 = 2(|ab| - ab) \geqq 0$$

したがって、右辺の方が大きい（又は等しい）ことが証明された。これはもう、お見事としか言いようがない。

さて、昔を懐かしむことがどれほど重要か分かっただろうか。たった一年前のことでもいい、昔を思い出して懐かしめばいい。それは過去には思いもつかなかったことを思いつく大いなるチャンスである。たとえ数ヶ月前のことでも、振り返ってみればその新たな見方を発見するかもしれない。注意すべきは、諸君は常に前進し成長しているが、過去の出来事はそのままの形で残っていくということである。いわば、たとえ同じ思い出でも、それを見ている人間が変化していくというわけである。例えば、大人になって子供の頃に見たアニメを改めて見ると、思っ

[*37] これは、$|a| \geqq a$ という不等式を、$|\bigcirc| \geqq \bigcirc$ というように概念的に理解し、その○の中に ab を入れたと考えればいい。分かっているとは思うが念の為。