青春の高校数学 1

方手雅塚 著

中表紙イラスト 「絶対値さん」 by 方手雅塚

青春の高校数学 1

by

方手雅塚

目次

序文

高校数学は青春である。それはおそらく間違いのない事実である。そんなことは初耳だという人は、ぜひ本書を読んで頂きたい。本書は、形としては高校数学の参考書であるが、その焦点は常に青春という一点に置かれている。本書を読み進めるうち、あまりの感動に涙が止め処なく溢れ出てくることであろう。

数学は面白いだとか、数学は楽しいだとか、数学は美しいだとか。そんな主観的なことを言ったところで、しょせん響かない者には響かないし、また、響かせる必要もない。しかし、数学が青春であることは誰もが認識すべき非常に重要な事実である。特に現役の高校生諸君の場合は、今この時期に理解しておかないと取り返しのつかないことになる。なぜなら、青春は二度とは戻らないものだからである。本書を通じて、一人でも多くの高校生がその青春を力の限り謳歌することを願う。

方手雅塚
Ann Arbor, May 2007

第 1 章

数と式

1.1 整式とは何か

整式は青春である。それは疑いようのない事実である。整式は、元々は青春式と呼ばれていたのだが、略されて青式と呼ばれるようになり、それが後に整式と書かれるようになったと言われている[*1]。日本の偉大な数学者・岡潔博士もかつて「整式は青春なんだ！」と近所の子供達に熱心に話していたという噂のようなものも存在する[*2]。ここでは、初期の「青春式」というイメージに忠実に整式について解説していこう。

中学校ですでに学んでいると思われるが、定数と文字が掛け合わされた式を**単項式**と呼ぶ。例えば、

$$2x, \quad -5x^3y, \quad 3abc, \quad -7x^2yz$$

などは全て単項式である。もう既にこの辺りから青春的な雰囲気が感じ取られるが、これはまだまだ序の口である。まず、高校生は、ある文字に焦点を当てたとき、それ以外のものは数も文字も全て一緒にして“定数”や“係数”と呼ぶ。例えば、単項式

$$-7x^2yz$$

を、x についての単項式として見たとき、その**係数**は x 以外の部分全てであり、$-7yz$ となる[*3]。そして、この単項式は x に注目すれば**次数**は 2 であり、それゆえに 2 次式と呼ばれる[*4]。以上より、注目する文字によってその式の係数や次数が変化することが理解されるであろう。それはイメージでいうと、

$$\begin{aligned} x \text{ の単項式と見る} &\to (-7yz)x^2 \\ y \text{ の単項式と見る} &\to (-7x^2z)y \\ z \text{ の単項式と見る} &\to (-7x^2y)z \\ p \text{ の単項式と見る} &\to (-7x^2yz) \end{aligned}$$

のように、定数とみなすものは全てカッコの中に入れてしまい、特定の文字についてだけの式だと認識するわけである[*5]。このイメージをつかむだけでも、大人への階段を一歩上がったように感じることであろう。諸君はもはや中学生ではないのである。

単項式とくれば多項式である。それは単項式の和である。例えば

$$2x - 5x^3y + 3abc - 7x^2yz$$

といったものである[*6]。では整式とは何なのか。何を隠そう、**整式＝単項式＋多項式**である。それは全ての文字式の総称であり、英語でいえばポリノーミアル（polynomial）である。その響きはいかにも青春である。この整式

[*1] 嘘だ。
[*2] そんな噂は存在しない。岡潔 (1901-1978) は、多変数解析函数論において大きな業績を残した日本の偉大な数学者である。
[*3] 高校数学での係数は、単に数字の部分ではなく、注目する文字以外のもの全てを意味する。
[*4] 次数とは、注目した文字が掛け合わされている数のことである。例えば、x の単項式なら、掛けあわされている x の数。
[*5] 一番下の例は、式の中に p がないので全体が定数であるという意味である。
[*6] 引き算も交じっているが、引き算は足し算で表せることを思い出そう。

$$2x + (-5x^3y) + 3abc + (-7x^2yz)$$

よって、これは単項式の“和”である。

も注目する文字によって見方が変わる。x についての整式としてみれば、イメージは

$$(2)x + (-5y)x^3 + (3abc) + (-7yz)x^2$$

のようになる[*7]。多くの人は、このイメージをさらに美しいものにするために、これらを次数の大きいものから順に並べて

$$(-5y)x^3 + (-7yz)x^2 + (2)x + (3abc)$$

と書く。この順番は**降べきの順**と呼ばれる[*8]。そして、この整式の次数は一番大きいもの（即ち x^3）で代表して3とし、我々はこれを“x について3次式”などと言う。ちなみに、y に注目するならば、そのイメージは

$$(-5x^3 - 7x^2z)y + (2x + 3abc)$$

となり、これは y について1次式となる。注目する文字を変えただけで、このようにイメージはガラリと変わるのである。実に驚くべきことである。これが青春でなくて、何だというのであろうか。

降べきの順は非常に重要である。例えば、2つの整式の和と差を計算するときなどは、**まずは何も考えずに降べきの順に並べる**ことから始める。例えば、$A = 3x^3 - x^2 + 5x - 7$ と $B = -x^3 + 2x + 10$ の和と差は、以下のように並べて筆算すると同類項がきれいに並んで計算しやすく大変気持ち良い[*9]。

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x^3 & -x^2 & +5x & -7 \\ +) & -x^3 & & +2x & +10 \\ \hline & 2x^3 & -x^2 & +7x & +3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & 3x^3 & -x^2 & +5x & -7 \\ -) & -x^3 & & +2x & +10 \\ \hline & 4x^3 & -x^2 & +3x & -17 \end{array}$$

ここで、整式と整数は非常に良く似た言葉であるが、実は整数もまた青春であることを指摘しておこう。例えば、以下の整式を考えよう。

$$4x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 1$$

これに $x = 10$ を代入すると、

$$4 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10 + 1 = 42571$$

そう、整数になるのである。しかも、それは上の整式の係数を左から順に並べたものである。逆に言えば、我々が日常生活で使う整数という数は、整式の係数だけを取り出して横に並べたものと考えることができるのである[*10]。なんという青春な事実であろうか。ある意味、整式は整数を一般化したものだったのである。ここで、「係数が負のときはどうなるんだろう？」という疑問を抱いた君は相当に青春である。x に代入する値と係数の関係をじっくり考えて、10進法や2進法と関連させてその疑問を解決してくれ。後は任せたぞ。

諸君は今、注目する文字を変えたり降べきの順に並べ変えたりすることを理解し、中学生達の理解を超えた世界へと足を踏み入れた。真顔で文字を定数と呼んだり、様々な文字の入り乱れた整式を眺めて「これは、x については3次式なんだよね」などと知ったような口調で得意気に話す。また、注目する文字を変えては同じようなことをつぶやき、整式の様々な側面を自慢気に語る。さらに、整数と整式の関係に疑問を抱いて七転八倒のた打ち回りながら思考を深めていく。その姿はまさに青春である。青春時代という名のフィールドを駆け抜ける諸君の美しい姿である。やはり整式は青春式である。それは疑いようのない事実である。

1.2　整式の乗法

駅で、シャキッとした老人と彫りの深い青年が言い争っている。「何を言っとるか！ やればできる！」と自信満々で主張するシャキッとした老人。対して「それは、太っている人に『やせればやせられる！』と主張するよう

[*7] カッコは各項の係数。

[*8] 逆に、次数の低いものから並べたときは、それを**昇べきの順**という。

[*9] そのあまりの美しさに鼻血を噴き出す高校生が毎年続出するという。

[*10] こう考えれば、降べきの順というのは実に自然な順序であるということが実感できるだろう。整数でいえば、桁の高い数字から順に書くということに相当するわけである。

な、全く意味を成さない主張だ！」と激しく言い返す彫りの深い青年。ひるむことなく老人が「生意気言うな！屁理屈こねとるヒマがあったらとっととやれ！」と言えば、青年も負けじと「頑張り過ぎるのも問題だ！ 急がば回れだ！」と返す。二人の熱い言い争いに、周りの人々は電車に乗るのも忘れて聞き入っている。整式の乗法はある意味“やればできる”ものである。なぜなら、出来ないということは有り得ないからである。しかしながら、むやみにやればいいというものでもない。その対比は、まさにこの老人と青年である。彼らならばどのように整式の掛け算を行なうか、じっくり考えてみよう。

まずは単項式の乗法から始めよう。単項式の乗法は全て指数法則を基にして行う。すなわち、これさえ知っていれば単項式の乗法はマスターしたも同然なのである。指数法則とは、$a>0$、$b>0$、m と n を正の整数として、下の三つの式で表される。

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{a^m \times a^n} &\boldsymbol{=} \boldsymbol{a^{m+n}} \\ \boldsymbol{(a^m)^n} &\boldsymbol{=} \boldsymbol{a^{mn}} \\ \boldsymbol{(ab)^n} &\boldsymbol{=} \boldsymbol{a^n b^n} \end{aligned}}$$

これらは、下のようにイメージすれば、容易に理解できるであろう。

$$\overbrace{(a\cdot a\cdots a)}^{m\text{ 個}}\times\overbrace{(a\cdot a\cdots a)}^{n\text{ 個}}=\overbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a)}^{m+n\text{ 個}}$$

$$\overbrace{\overbrace{(a\cdot a\cdots a)}^{m\text{ 個}}\cdot\overbrace{(a\cdot a\cdots a)}^{m\text{ 個}}\cdots\overbrace{(a\cdot a\cdots a)}^{m\text{ 個}}}^{n\text{ 個}}=\overbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a)}^{mn\text{ 個}}$$

$$\overbrace{(ab)\cdot(ab)\cdots(ab)}^{n\text{ 個}}=\overbrace{(a\cdot a\cdots a)}^{n\text{ 個}}\cdot\overbrace{(b\cdot b\cdots b)}^{n\text{ 個}}$$

この法則を用いれば、例えば、

$$\begin{aligned} (a^3)^2\times a^5 &= a^6\times a^5 = a^{11} \\ (-a)^3 &= (-1)^3\times a^3 = -a^3 \\ 3x^2\times 5x^3 &= 15x^5 \end{aligned}$$

というように、どのような計算も実に淡々と計算することができる[*11]。この種の問題は、シャキッとした老人の言う通り取り敢えずやればできる。ごちゃごちゃ言ってる間に計算が終わってしまうであろう。恐らく彫りの深い青年も異論はないだろう。

単項式とくれば、次は多項式である。すなわち整式の乗法である。これは指数法則と分配法則を基に行われる。分配法則は下の二式で表される。

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A(B+C)} &\boldsymbol{=} \boldsymbol{AB+AC} \\ \boldsymbol{(A+B)C} &\boldsymbol{=} \boldsymbol{AC+BC} \end{aligned}}$$

例えば、$(x+3)(2x^2-x+2)$ は、$(x+3)$ を A として上の式を用いれば、

$$\begin{aligned} (x+3)(2x^2-x+2) &= 2x^2(x+3)-x(x+3)+2(x+3) \\ &= 2x^3+6x^2-x^2-3x+2x+6 \\ &= 2x^3+5x^2-x+6 \end{aligned}$$

と計算できる。ここで、計算結果が整式の形になったことに注意しよう。つまり、整式×整式＝整式となるのである[*12]。このように、整式の積を計算して、その結果を整式で表すことを**展開する**という。上の例でいえば、

[*11] 計算するときは、にやけ顔よりもむしろクールな顔で淡々と行なう方が好ましい。

[*12] このような状況を、「整式は掛け算という演算について閉じている」などと表現することがある。

「$(x+3)(2x^2-x+2)$ を展開したら、$2x^3+5x^2-x+6$ になったよ」のように表現されるわけである[*13]。この手の問題もまた、シャキッとした老人の言うとおり、取り敢えずやればできるように思える。少なくとも、展開できない整式の掛け算はない。しかし、ここで彫りの深い青年は反論する。「頑張り過ぎてはいけない！」と。そう、時に整式の展開は大変な作業になる。そして、多くの項を掛け合わせるのも大変だが、似たような形の展開を何度も行うこともまた大変である。例えば、$(3x+4)^2$ のような頻繁に出くわす展開を、分配法則に忠実に（1 つ 1 つの項を掛け算して）

$$\begin{aligned}(3x+4)^2 &= (3x+4)(3x+4)\\ &= 9x^2+12x+12x+16\\ &= 9x^2+24x+16\end{aligned}$$

などとしていては駄目なんだと、彫りの深い青年は主張するのである。そのような“頑張り”はいらないのだと。ではどうするか。頻繁に出くわす展開は公式として覚えればいいのである。例えば、上の例では

$$(\bigcirc+\triangle)^2=\bigcirc^2+2\bigcirc\triangle+\triangle^2$$

という形で公式として覚えておき、$\bigcirc$ に $3x$ を、$\triangle$ に 4 を代入して

$$\begin{aligned}(3x+4)^2 &= (3x)^2+2(3x)(4)+4^2\\ &= 9x^2+24x+16\end{aligned}$$

というように、一気に計算してしまえばいい[*14]。このような公式は**乗法公式**と呼ばれ、以下のようなものが存在する[*15]。

$$\boxed{\begin{aligned}(\bigcirc+\triangle)^2 &= \bigcirc^2+2\bigcirc\triangle+\triangle^2\\ (\bigcirc+\triangle)(\bigcirc-\triangle) &= \bigcirc^2-\triangle^2\\ (x+\bigcirc)(x+\triangle) &= x^2+(\bigcirc+\triangle)x+\bigcirc\triangle\\ (ax+b)(cx+d) &= acx^2+(ad+bc)x+bd\end{aligned}}$$

これらに加えて、高校生は以下の 3 次式に関する公式も頭に入れておかなければならない。

$$\boxed{\begin{aligned}(\bigcirc+\triangle)^3 &= \bigcirc^3+3\bigcirc^2\triangle+3\bigcirc\triangle^2+\triangle^3\\ (\bigcirc+\triangle)(\bigcirc^2-\bigcirc\triangle+\triangle^2) &= \bigcirc^3+\triangle^3\end{aligned}}$$

さらに、これも覚えておこう。

$$\boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$$

以上の公式を全て覚えておけば、今後の高校生活は大変有意義なものになることは間違いない。例えば、$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$ などは、

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=(x+(2y))\left(x^2-x(2y)+(2y)^2\right)$$

[*13] 整式の場合は単項式よりも複雑な掛け算になるが、それだけに一層クールに淡々と計算するべきである。
[*14] さっきの計算法との大きな違いは、今回は何も考えることなく機械的に展開ができたことである。これは楽である。
[*15] 証明は諸君に任せよう。左辺を“頑張って”展開すれば証明できるはずである。頑張れ！

という形で見れば、公式 $(\bigcirc+\triangle)\left(\bigcirc^2-\bigcirc\triangle+\triangle^2\right)=\bigcirc^3+\triangle^3$ に当てはまることが分かる。となれば、後は簡単。公式に x と $2y$ を放り込んで、

$$\begin{aligned}(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)&=x^3+(2y)^3\\&=x^3+8y^3\end{aligned}$$

と、いとも簡単に展開が終了する。ちなみに、教科書には $(\bigcirc-\triangle)^3$ のような符号がマイナスの場合のものも載っているかもしれないが、暗記も心配も無用である。例えば、$(2x-y)^3$ などは、

$$(2x-y)^3=\{(2x)+(-y)\}^3$$

として無理矢理プラスを使って書き[*16]、プラスの場合の公式を用いて

$$\begin{aligned}(2x-y)^3&=\{(2x)+(-y)\}^3\\&=(2x)^3+3(2x)^2(-y)+3(2x)(-y)^2+(-y)^3\\&=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3\end{aligned}$$

とすればいいのである。このようにして覚えるべき公式の数を減らす。これもまた彫りの深い青年のいう「頑張らない」ことの一つなのである。

以上のように、頑張るべきかそうでないかは一般的な結論が出るような問題ではなく、ケースバイケースと言えるかもしれない。シャキッとした老人も彫りの深い青年もどちらも間違ったことを言ってるわけではない。そして、恐らく、それを見ている周りの人々もそんなことに興味があるのではない。きっと、そういったことに対して一途な二人が無駄に熱く語り合うという、まさに青春のワンシーンのごとき状況に興味をそそられたのに違いない。老人と青年、どちらでもいい。多くの掛け算を経験し、君も青春の日々を熱く過ごそうではないか。

1.3　因数分解

大衆酒場で、いい年をしたおっさん達が肩を組んで酒を飲んでいる。よく見ると泣いているようだ。君は、その涙は因数分解で固く結ばれた友情の結晶だということに（まだ）気づかない。因数分解は青春である。しかし、君がそれを今すぐ理解するのは難しいかもしれない。それは、因数分解をするのに必死になりがちで、因数分解の本質をつかむ心の余裕がないからである[*17]。ここでは因数分解の戦略をしっかりと身に付け、因数分解という名の青春についてじっくりと考えてもらいたい。

因数分解は、乱雑に散らかされた他人の部屋を元に戻すようなもので、それは確かに困難な仕事である。しかしながら、その戦略は存在する。一般的な数学のアプローチとして、**未知の問題を既知の問題に変換して解く**という手法がある。例えば、4 次方程式 $x^4-4x^2+4=0$ は、$X=x^2$ とおくことにより、$X^2-4X+4=0$ という誰でも知っている 2 次方程式に変換できる。となれば、これは簡単に因数分解できて $(X-2)^2=0$ より、$X=2$。そして $x=\pm\sqrt{X}=\pm\sqrt{2}$ というように、元の式の答えに戻す。因数分解も、まさにこれがポイントであり、どうやって知っている型に合わせるか（又は、知っている型をあぶりだすか）が鍵となる。まず、知っておかなければならない基本的な型を下に記す[*18]。

公式 1.	$\boldsymbol{ax+ay}$	$=$	$\boldsymbol{a(x+y)}$
公式 2.	$\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab}$	$=$	$\boldsymbol{(x+a)(x+b)}$
公式 3.	$\boldsymbol{x^2+2ax+a^2}$	$=$	$\boldsymbol{(x+a)^2}$
公式 4.	$\boldsymbol{x^2-y^2}$	$=$	$\boldsymbol{(x+y)(x-y)}$
公式 5.	$\boldsymbol{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$	$=$	$\boldsymbol{(x+y)^3}$
公式 6.	$\boldsymbol{x^3+y^3}$	$=$	$\boldsymbol{(x+y)(x^2-xy+y^2)}$

[*16] 全ての引き算は足し算で表すことができる。
[*17] あるいは、因数分解ができればそれで満足してしまい、より深く考えようとしないからかもしれない。
[*18] 乗法公式の逆。**これらは絶対に知っておかなければならない！** ちなみに、一番上の式は単にくくっているだけだが、それも立派な因数分解である。

上の必須公式に加えて、さらに以下のものも覚えておくと損はしない[19]。

$$\boxed{(x^3+y^3+z^3)+3(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)^3}$$

この証明は諸君に任せよう。

ちなみに、乗法公式と同様、これらの公式を覚えるにあたって重要なことは、文字式として入れるのではなく、それらを概念として入れることである。例えば公式 4 は、

$$\bigcirc^2-\triangle^2=(\bigcirc+\triangle)(\bigcirc-\triangle)$$

のようにシンボルで、又は、

$$2\text{ 乗ー }2\text{ 乗} = \text{和と差の積}$$

のようなイメージで理解しておく。そうすることによって、

$$49x^2-16x^4y^2$$

などは、まず、これは「2 乗ー 2 乗」の形ではないかと推測し、$\bigcirc$ と $\triangle$ に相当するものを、ぐっと考えて見つけ出し（試行錯誤）、「$(7x)^2-(4x^2y)^2$ だがや！」などと言いながら公式を当てはめて[20]

$$(7x)^2-(4x^2y)^2=(7x+4x^2y)(7x-4x^2y)$$

と因数分解する[21]。同様に、公式 2 などは、「足して真ん中 $(a+b)$、掛けて最後 (ab)」などのように言葉で理解しておくと便利である。また、その他の公式も少なくとも○や△などのシンボルで捉えておこう[22]。このような概念的な理解は応用力を高める。

上の例から分かるように、因数分解のポイントは、**推測**と**試行錯誤**にある。いわば、知っている型（公式）に当てはめるために、推測と試行錯誤を繰り返すのである。例えば、

$$x^2+(y-1)x+(2y-6y^2)$$

を因数分解するとしよう。さて、これは一見どの型にも当てはまらないようだが、x の式だと考えれば（y は定数とみなす）、一つの可能性は公式 2 である。推測完了。そして試行錯誤へと移るのだが、このときこの公式 2 を

「足して真ん中、掛けて最後」

というように概念的に覚えていると、すぐに

「足して $(y-1)$、掛けて $(2y-6y^2)$ となるような 2 つの式」

さえわかれば因数分解できることがわかる。それならば、最後の項である $(2y-6y^2)$ は何か二つの項の積の形で書けるはずである。さあ、ここからが計算能力である。ここで更にぐっと考えて、例えば

$$2y-6y^2=-2y\times(3y-1)$$

と書いてみると、すぐに「$-2y$ と $(3y-1)$ を足したら $(y-1)$ だべ！」と気づく[23]。そうすれば、あとは公式に当てはめて

$$x^2+(y-1)x+(2y-6y^2)=(x-2y)(x+3y-1)$$

[19] 得するかどうかは、君のアピール次第だ。
[20] 必ずしも名古屋弁でなくても良いが、名古屋弁で言うとナカナカ気持ちいいぞ。君もぜひ試してみよう。
[21] $A=7x$、$B=4x^2y$ などと置き換えてみるのも良いであろう。
[22] ○や△はあくまでも一例であり、それはハートマークや温泉マークでも構わない。
[23] これは神奈川弁だろうか。これもナカナカ言いやすくて気持ちいい。

として因数分解終了である[*24]。

それでは最後に、上でいう「推測」を容易にする為の重要なテクニックを紹介しよう。これである。

一つの文字に注目し、降べきの順に並べる。

（注意：**特に、次数の低い文字に注目**すると良い。）これは非常に重要なテクニックである。例えば、上の例題の式が $x^2+xy-x-6y^2+2y$ のように展開された形でバラバラに書かれていたら、公式を推測するのが困難であろう。こんなときは、どれか一つの文字を選び、降べきの順に並べることにより、推測しやすくなる。この場合は x でも y でもどちらでもよいので、例えば x を選んで、$x^2+(y-1)x+(2y-6y^2)$ と書けば、上でやったように因数分解できる[*25]。ここで一つ例題をやってみよう。これは、最初にうまく整理できれば推測が不必要となる例である。

$$x^3-2x^2y-2xy-2y-1$$

を因数分解したい。まず最初に x について整理してみよう。すると、

$$x^3+(-2y)x^2+(-2y)x+(-2y-1)$$

となる。これは見たところ、公式 5 に当てはまりそうだ。しかしながら、最後の項が「何かの 3 乗」の形になっていないので、それは無理である。推測は失敗。かといって、他の公式が使えるようにも思えない。それでは、逆に y で整理してみよう。

$$-2y(x^2+x+1)+(x^3-1)$$

このままの形では何の型にもはまらないが、ここで「二つ目の項は x^3-y^3 の公式 6 を使って、まだ分解できるっちょ！」[*26]と気づいて、

$$-2y(x^2+x+1)+(x-1)(x^2+x+1)$$

とする。そうすれば (x^2+x+1) でくくれることに気づいて、

$$(x-2y-1)(x^2+x+1)$$

となり終了[*27]。

ここまでの話をまとめると、**因数分解の戦略**は、基本的には以下のようになる。

1. **まずは、共通因数でくくる。**
2. **一つの文字（次数の低いもの）について降べきの順に並べる。**
3. **当てはまる公式を探す。**

共通因数でくくるところは非常に大事である。それをしないで公式を探すことは、男女 50 人の中から 2 人姉妹を探すようなものである（男は邪魔なのでくくり出そう）。一つの文字に注目することも同様に、邪魔なものは見ない為の方法だといえるであろう。

結局のところ、確かに因数分解は難しい。しかしながら、それは上に記した基本公式と戦略を知ってからの話である。そして、多くの経験を重ねることにより、推測する力と計算力を磨く。幸い因数分解の問題を作るのは非常

[*24] この問題に関しては「たすきがけ」という方法が存在するが、この種の問題にしか適応できず、応用がきかないので省略する。許してくれ。

[*25] y について降べきの順に並べてもできるかどうか試してみよう。

[*26] これは何弁だ？

[*27] y の方が x よりも次数が低かったことに注意。最初から次数の低いものに注目していれば、もっと素早く因数分解できたのである。

に簡単であるので[*28]、友人と因数分解の問題を作り合うのもいい練習になるだろう。そのように切磋琢磨していくことにより、友情はみるみるうちに深まっていくことであろう。これが青春でなくて何が青春だというのか。酒場のおっさん達は、紛れも無い未来の諸君の姿である[*29]。親友と肩を組み、ツバを撒き散らしながら因数分解の公式を叫ぶ。他の客の迷惑になるので注意をしようと酒場の主人は彼らに近づいていくが、彼らの真っ赤な頬をダラダラと流れる涙に気づき、はっと気づけばもらい泣きである。そう、因数分解はアルコールを分解して涙を生成する青春の消化酵素である。さあ、君も因数分解をマスターしよう。そして素晴らしき青春の日々を送ろうではないか。

1.4　実数の世界

青春に悩みはつきものだ。君も何かしらの悩みを抱えていることであろう。しかし、悩みというものは解釈一つで吹っ飛んでしまうものである。数学では、実数がそのことを教えてくれる。かつては、「実数を制する者、青春を制す」というピタゴラスの有名な言葉が高校数学の教科書の表紙に大きく印刷されていたものである[*30]。ここでは、実数の世界についてしっかりと学び、悩み無き青春を存分に楽しんで頂きたい。

実数とは、有理数と無理数の二つからなる数全体のことである[*31]。**有理数は分数で表すことのできる数であり、無理数とは分数で表すことができない数である。** 有理数はさらに三種類に分けることができる。一つは、$\frac{6}{2}=3$ や $\frac{3}{1}=3$ のようにきれいに割り切れる分数、即ち整数。もう一つは、$\frac{6}{5}=1.2$ や $\frac{5}{4}=1.25$ のように小数になってしまうが割り切れるもの、即ち有限小数。そして最後に、$\frac{1}{3}=0.3\cdots$ や $\frac{9}{7}=1.2857142\cdots$ のように、割り切れないが、ある所から数字が同じ順序で無限に繰り返されるもの、即ち循環小数。このような考え方で言えば、無理数は循環せずに無限に続く小数ということになる。これらをまとめたものが下の図である。

- 実数
  - 有理数 ･････････
    - 整数 ･････････
      - 正の整数（自然数）
      - 0
      - 負の整数
    - 有限小数（割り切れる分数）
    - 循環小数（割り切れない分数）
  - 無理数（循環しない無限小数。$\sqrt{2}$ や π など。）

（ご存知の通り、自然数は正の整数である。それに、自然数にマイナスの符号をつけただけの負の整数とゼロとを加えたものが整数である。）この図はしっかりと頭に叩き込んでおこう[*32]。ちなみに、有理数と無理数はどちらの方が沢山存在するかという疑問について考えてみるのも有意義であろう。

さて、ここからが重要である。上のように分類された数は、果たして演算に対してどのような振る舞いを見せるのか調べていく。例えば、明らかに自然数＋自然数＝自然数となるが、このように自然数と自然数の足し算（という演算の結果）が自然数になるとき、自然数は足し算について**閉じている**という[*33]。すると即座に、自然数は引き算について閉じていないことに気づくであろう。なぜなら、$1-4=-3$ のように自然数ー自然数＝負の整数となることがあるからである。逆に言えば、自然数しか知らない人間には引き算というアイデアは浮かばないとも言えよう。もちろん、自然数は割り算についても閉じていない。また、同様に考えれば、整数が割り算について閉

[*28] 例えばテキトーに $(x-y+1)(x^3+y^2)$ などのように因数分解された形の式を考えて、展開すればいい。

[*29] 女の子でも頑張ればおっさんになれるが、あまりお勧めしない。

[*30] 嘘だ。

[*31] 世の中のほぼ全ての数は実数である。実数でないのは 2 乗して -1 になるような奇天烈な数だけである。

[*32] 本当に頭をパンパン叩かないように。まだ青春は始まったばかりだ。自分を大切にしろよ。

[*33] 一般に、ある数の集合について、そのうちの二つを演算した結果がまたその集合内の数になっているとき、その集合はその演算について「閉じている」という。

じていないことも分かるであろう（下の表）。

	和	差	積	商
自然数	○	×	○	×
整数	○	○	○	×
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○

○：閉じている　×：閉じていない

このように考えてみれば、この世の中は閉じていない世界だらけだということが分かる。芸人同士の夫婦の子供が芸人になるとは限らないし、毛深い夫婦の子供が必ず毛深いとも限らない。さらに、美味しいうどんと美味しいアイスクリームを混ぜても美味しい食べ物ができるとは限らないし、いくつかの哀愁漂う音楽を同時に流しても哀愁が漂うとは限らない。そして君にとって重要なことは、高校生の悩みの殆ど全てはこの閉じていない世界が原因だということである。例えば、色白（又は色黒）で悩んでいる高校生、生まれつきの茶髪（又は白髪）で悩む高校生、東京大学に合格できずに悩む高校生、彼女ができなくて悩む高校生。明らかに、これらは全てある集合からはみ出しているという感覚に基づく悩みである*34。例えば、閉じた世界を作りたいがために親は「お父様もお母様もバカ田大学*35に合格しているのだから、あなたも合格できるはずなのよ！」と子供にプレッシャーをかけるが、期待に応えられない子供は悩んでしまう。こんなときにはどうすればいいか？ 世界を拡大して、閉じている世界を作ればいい。それは必ず作ることができる。実数の世界でいえば、実数と有理数は四則演算*36について閉じている（上表参照）。つまり、ほんの少し集合を拡大するだけで、世界は簡単に閉じてしまうのである。毛深い夫婦の例でいえば、人間という集合で考えればその子供もまた人間であり、ゆえに閉じているといえる。美味しいうどんと美味しいアイスクリームを混ぜてできたものも、贅沢を言わなければやはり美味しいであろう。バカ田大学に合格できなくても、取り敢えず大学に進学すれば大学進学者という閉じた世界の住人になれる。このように、解釈一つで世界は簡単に閉じてしまうのである。そうやって人間は幸せになれるのである。逆にいえば、小さな世界に身を置いていると、なかなか世界が閉じにくくイライラも募りやすい。自分が大阪人だからといって子供にも大阪弁を強要したり、自分が嫌いだからといって家族に納豆を食べさせなかったり。そんなことをすれば当然反発されるので、イザコザは絶えない。そんなときは解釈を広げて、皆人間であり多様性はその自然な特徴なのだと考えれば皆が幸せになれる。閉じた世界は誰でも簡単に作ることができる。難しい理屈も何もいらない。脳細胞に少量の電流を流して解釈するだけでよい。いわば、青春を楽しく過ごすかどうかは、己のサジ加減一つで決まるのである。さあ、頭をつかって多くのことを解釈しよう。そして悩み無き青春時代を大いに楽しもう。

1.5　絶対値

公園で小さな子供達が遊んでいる。君はベンチに座って子供達を眺めている。彼らの微笑ましい会話が聞こえてくる。「二つのチームに分かれて勝負しようよ！」「じゃあ、俺達 7 人と君達 3 人で勝負だよ！」「おいおい、それじゃあ **3 から 7 を引いて 4** だから、そっちは 4 人も多いじゃないか！」「はっはっは！ ほんのジョークだっつーの！」*37 それを聞いていた君は、はっと気づく。「3 から 7 を引いて 4？」そう、3 から 7 を引くとマイナス 4 になってしまう。7 から 3 を引くほうが自然である。しかし、人数の話をしている子供にとっては、正の数こそが自然な数なのである。それはまさに絶対値の概念である。そして、小さな子供が絶対値の概念を身につけていることに君は恐れおののく。

絶対値は距離の概念として定義される。**数直線上での原点 $\mathbf{O}(0)$ と点 $\mathbf{A}(a)$ との距離を a の絶対値と呼び、$|a|$**

*34 人間は集団に属さない状態を恐れる傾向があると言われる。それはまさに、閉じていない世界に不安を抱くということである。
*35 赤塚富士夫の漫画「天才バカボン」のバカボンのパパの出身大学。
*36 足し算・引き算・掛け算・割り算（加算・減算・乗算・除算）をまとめて四則演算と呼ぶ。また、四則演算について閉じている集合を体 (Field) と呼ぶ（実数体や有理数体などと呼ぶ）。
*37 「ジョークだっつーの！」は、一度は使ってみたいフレーズである。

で表す[*38]。だから、$|3| = 3$ であるし、$|-3| = 3$ なのである。これを応用すれば、例えば **2 点 $\mathbf{A}(\boldsymbol{a})$、$\mathbf{B}(\boldsymbol{b})$ 間の距離 AB は、AB$=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ で表される**ことになる。これは、引き算の順序に関係なく引き算の結果を正の値にすることを意味している。即ち、小さな子供と同様に「**とにかく正の数にしてしまう**」わけである。それだけの理解でも、以下のような絶対値の性質に納得できるであろう[*39]。

$$\boxed{\begin{aligned} |\boldsymbol{a}|^2 &= \boldsymbol{a}^2 \\ |\boldsymbol{ab}| &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \\ \left|\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right| &= \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} \end{aligned}}$$

但し、より複雑なものの絶対値を扱う可能性のある高校生諸君は、もう少し数学的に理解しておく必要がある。それは、以下のようなものである。

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \geqq \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} < \mathbf{0} \end{cases}}$$

これは“絶対値の外し方”を表しているといえよう[*40]。例えば、$|-3|$ は中身が負なので、公式通り負の符号をつけて外せば $-(-3) = 3$ となり、きちんと正の数になるというわけである。このような考え方が身についている高校生の君は、絶対値の概念が自然と身についている小さな子供を見たときに震え上がってしまうのである[*41]。もちろん君も小さい頃はそうだったに違いない。しかし、すくすくと育つにつれ、いつの頃からかそのような本能的理解（又は直感的理解）ごときものをどんどん失っていくのだろう。それは悲しいことであるが、幸い君の周りには子供達がいる。さあ、勇気を出して子供達と戯れよう。失われた記憶を取り戻そう。そして、二度とは戻らない青春時代を直感的に謳歌しよう。

1.6　平方根と有理化

「平方根な男はもうモテない！」などと言われて久しいが、依然として、平方根な男を好む女性は多い。しかし残念なことに、「やっぱり y 切片な男が好き！」などという電車の吊り広告の踊り文句につられ、多くの男子高校生は全く的外れな路線へと流れてしまい、結局彼女もできずに寂しい高校生活を送っているという。君もその中の一人だと思うが[*42]、ここで平方根について徹底的に理解し、立派な平方根ボーイとなって青春の舞台に復帰して頂こう。

さっそくだが、こういうことだ。

2 乗して $\boldsymbol{a}$ になる数のことを $\boldsymbol{a}$ の平方根と呼ぶ。（但し、$\boldsymbol{a} \geqq \mathbf{0}$）

例えば、4 の平方根は 2 と -2。25 の平方根は 5 と -5 である。容易にわかると思うが、平方根には**必ず正の平方根と負の平方根の二つがある**[*43]。さて、ここで問題が起きる。

5 の平方根は何だ？

2 乗したら 5 になる数。それが存在することは想像できるかもしれないが、どんな数になるのかはよく分からない[*44]。ここで考え込んでしまうようでは、女の子にアピールできない。こんなとき、平方根な男は「わからないなら、わかったことにすればいいのさ」とつぶやき、

$$5 \text{ の平方根} \quad = \quad \sqrt{5} \quad \text{と} \quad -\sqrt{5}$$

*38 数直線上で座標が x である点 P のことを P(x) と表す。
*39 納得しなさい。小さな子供でもわかるはずだ。君にできないはずがない。
*40 ちなみに、$a = 0$ のときは、a としても $-a$ としても所詮はゼロなので、どうでもよい。
*41 全国の高校生の約 76.5 %がそのような恐怖経験をしていると言われている。
*42 取り敢えずそういうことにしておこう。
*43 この事実は、当たり前のようで意外に見落としがちである。
*44 ちょっと考えれば、2 と 3 の間にあることはわかるが、やはり正確な値は簡単には見つけられない。

としてしまうのである[*45]。この $\sqrt{\ }$（根号）を使えば、77 の平方根は $\pm\sqrt{77}$、0.1 の平方根は $\pm\sqrt{0.1}$、$\frac{1}{2}$ の平方根は $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ など、どんな数の平方根も表すことができる。この強引さこそが、まさに平方根な男がモテる理由の一つなのである。

さて、その定義の仕方から明らかなように、根号のついた数字は**前にマイナスの符号が無い限り、中が何であっても正の数である**[*46]。そしてその逆もまた正しい。すなわち、□ に何が入ろうとも

$$\sqrt{\square} \geq 0 \quad かつ \quad -\sqrt{\square} \leq 0$$

は、□ に何が入ろうとも常に成立するということである。例えば $\sqrt{(-5)^2} = -5$ は大きな間違いであり、

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad > 0$$

だということ[*47]。そして、$-\sqrt{(-1)^2} = -(-1) = 1$ も大きな間違いであり、

$$-\sqrt{(-1)^2} = -\sqrt{1} = -1 \quad < 0$$

であるということである。このように、中身が何であれ結果的には必ず外の符号と一致するという有言実行的なパワフルさも、これまた平方根な男がモテる理由の一つだといえよう。

平方根の計算は次の基本式を使って行われる。$a > 0$、$b > 0$ のときに限り、

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{\boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{b}} &= \sqrt{\boldsymbol{ab}} \\ \frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}} &= \sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} \end{aligned}}$$

が成立する。なんと素晴らしいことであろうか。平方根というのは、その積もその商もまとめて一つの平方根として包み込むことができるのである。その包容力が女性を引きつけないわけがない。やはり平方根な男はモテるのである。ちなみに、上の式から明らかなように、$k > 0$ のとき

$$\boxed{\sqrt{\boldsymbol{k^2 a}} = \boldsymbol{k}\sqrt{\boldsymbol{a}}}$$

が成立する。これは例えば $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$ のようにルートの中を簡単にするのに使われる。これも驚くべき平方根な男の特徴の一つである。何でもかんでも出せばいいというわけではなく、何かの 2 乗 (k^2) の形のものだけを外に出す。その落ち着いた振る舞いは、凡人が簡単に真似できるものではない。

最後に、平方根で非常に重要な有理化を考えよう。根号を含む分数は基本的には無理数であるが、それをまるで有理数のごとく書くことを有理化という[*48]。もっと簡単にいえば、**分母の根号をうまく消すことを有理化という**[*49]。簡単な例は、$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ の分母分子に $\sqrt{3}$ を掛けて、

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

とするタイプのものである。もう少し高校生らしい例で、$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ の分母分子に $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ を掛けて、

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}^2 - \sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{5-\sqrt{15}}{2}$$

[*45] ここで用いた記号 $\sqrt{\ }$ は根号（又はルート）と呼ばれる。時折、根号と近藤を混同する奔放な人を見かけるので注意すること。

[*46] a の平方根の正の方を $\sqrt{a}$ で表し、負の方を $-\sqrt{a}$ で表すのだから当然である。

[*47] ルートの中のマイナスサインに惑わされてはいけない。

[*48] $\frac{1}{\sqrt{3}}$ は明らかに無理数であるが、有理化された形の $\frac{\sqrt{3}}{3}$ の場合は、「3 分のルート 3」と読むので、その“3 分の”のところまでは有理数気分が味わえる。そのあと“ルート”と言って初めて無理数であることがわかるのである。そういう意味で、“有理数のごとく書く”と表現した。

[*49] 分母に根号を書くことは許されない。必ず有理化すること。分母に根号があるのは気持ち悪いと思い込みなさい。分母に根号があるのは、座ったときにお尻の下で得体の知れない生き物がうごめいているようなものだ。その生き物をテーブルの上など、良く見えるところに引っ張り出すのである。よく見てみたら案外お父さんだったりするかもしれないが、それは上に引っ張り出したからこそ分かることである。

というものもある[*50]。以上のように、平方根な男は無理数でも有理数のように表現する。それは、どんなときでも決してあきらめないという究極のプラス思考の表れである。皆が無理数だと言っても決して認めず、涼しい顔で有理数のごとく振舞おうとする。その頑固さに女性は無抵抗なまでに魅かれてしまう[*51]。

ここまで説明すれば、平方根な男がどのようなものかはっきりと分ったであろう。さあ、今すぐ平方根な男を気取って街へ出かけよう。道行く女の子に声を掛けまくってみよう。そして、青春の舞台への華麗なる復帰を遂げようではないか。

1.7 2重根号

2重根号は青春のハードルである。これを乗り越えて初めて青春を謳歌できると言っても過言ではない。実際、2重根号を外すことができる生徒にのみアルバイトを許可しているという高等学校が多い[*52]。また、2重根号を外せる生徒には職員用のトイレの使用許可を与えるという太っ腹な高等学校も存在するという[*53]。ここでは、2重根号の外し方についてしっかりと学んで頂き、青春のハードルを軽々と超えて頂こうと思う。

2重根号とは例えば以下のようなものである。

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

この2重根号を外せるか？ 即ち、これを1重根号のみで表すことができるか？ できる。 結論から言えば、以下のようになる。

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

これはなんとも不思議な式だ。しかし、これが正しいことは簡単に確かめられる。「右辺を2乗すれば、左辺の根号の内部の値になるはず」であることに着目し、右辺を2乗してみると、

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2\\ &= 2+2\sqrt{2\times 3}+3\\ &= 5+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

となって、きちんと根号の中の値になる。つまり、驚くべきことに正しく2重根号は外されているわけである[*54]。果たして、そこには一体どのようなからくりが隠されているのだろうか。

さっそくだが、a、b を正の実数として、$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を2乗してみよう。

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\\ &= a+2\sqrt{ab}+b\\ &= (a+b)+2\sqrt{ab}\end{aligned}$$

---

*50 このタイプのものは、常に分母の和を差に（又は差を和に）したものを分母分子に掛ければよい。

*51 究極の平方根ボーイは有理化だけでは満足しない。$\sqrt{2}$ は方程式 $x^2=2$ の解であるという事実を基にして、

$$\begin{aligned}x^2-1=1 &\longrightarrow (x-1)(x+1)=1\\ &\longrightarrow x-1=\frac{1}{x+1}\\ &\longrightarrow x=1+\frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

とし、これを入れ子のようにして右辺の x に入れていき、

$$\sqrt{2}=x=1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+x}}}}$$

のように、まさに分数のごとく表現しようとする。最後の x もまた $1+\frac{1}{1+x}$ であるので、これは無限に続くことになる。（このような数は**連分数**と呼ばれる。）究極の平方根ボーイは死ぬまで、否、死んでもあきらめないのである。

*52 そんなバカなことがあるはずが無い。

*53 太っ腹？

*54 中学生は、その驚きのあまりアゴがきれいにスコッと外れてしまうという。それが原因で、2重根号は中学ではなく高校で学ぶことになったという噂を聞いたことがある。

ここで、両辺のルートをとってみよう。

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}$$

終了。これが 2 重根号を外す為の公式である。2 重根号を“外す”わけであるから、左右逆に書いておいたほうがいいかもしれない。

$$\boxed{\boldsymbol{\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$$

それではこの公式の使い方を説明しよう。これは次のように頭に入れておく。

$$\boxed{\sqrt{(\bigcirc+\triangle)+\mathbf{2}\sqrt{\bigcirc\triangle}}=\sqrt{\bigcirc}+\sqrt{\triangle}}$$

つまり、**ルートの中が「(何かと何かの和) ＋ $2\times\sqrt{(\text{何かと何かの積})}$」になっていることさえわかれば、その“何か”と“何か”のルートの和にできる**ということを理解するわけである。例えば、最初に出てきた例の場合は、5 は $2+3$ で、6 は 2×3 ということから

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(2+3)+2\sqrt{2\times3}}$$

と気づけば、あとは公式によって

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

と堂々と書けばいいのである。もう一つ簡単な例を出しておこう。

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$$

これは、7 は $3+4$ で 12 は 3×4 と考えられるので、$\sqrt{3}+\sqrt{4}$ となる。ちなみに、引き算の場合も同様にできる。例えば、

$$\sqrt{9-2\sqrt{14}}$$

となっているときも、9 は $2+7$ で 14 は 2×7 なので、$\sqrt{7}-\sqrt{2}$ となるわけである[*55]。この結果が信じられない人は、実際にこの答えを 2 乗して確かめてみるとよい。

さて、ここからが問題である。多くの高校生は、2 重根号の公式を見て、内側のルートの前に 2 がない場合は公式が使えないと思ってしまうのである[*56]。それは青春時代を生きる者としてあるまじき姿である。青春の辞書に不可能の文字はないのである。**2 がなければ自分で 2 を作り出せばいい** のである。例えば下のような 2 重根号の場合、

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

内部のルートの前に 2 がないので一見公式が使えないようにも思えるが、こんなときはまず簡単に以下のように書き換える。

$$\sqrt{3+\frac{2\sqrt{5}}{2}}$$

(2 掛けて 2 で割れば何もしていないに等しい。) これで、ルートの前に 2 が現れた。そして通分すれば、

$$\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}$$

[*55] 引き算の場合は、大きい方から小さい方を引いたものが答えになる。ちなみに、公式はすぐに導けて、$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}$ である。右辺がゼロ以上なので、左辺も当然ゼロ以上、つまり大きい方から小さい方を引いたものにならなければならない。

[*56] 取り敢えず、君もそう思いなさい。

または、

$$\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

これで公式に当てはめることができる。ここで、6 は $1+5$ で 5 は 1×5 なので分子は $\sqrt{1}+\sqrt{5}=1+\sqrt{5}$、故に全体では $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$、これは有理化すれば結局 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$ となるわけである。2 重根号の展開は、道なき道を突き進む青春という名の冒険である。道が無ければ作ればいい。穴が無ければ掘ればいい。お金が無ければホラを吹けばいい[*57]。とにかく突っ走ることである。さあ、君も 2 重根号をバリバリ外し、職員用のトイレを堂々と使ってみよう。

1.8　2 次方程式の解法

２次方程式は、高校一年生にとって最初の大きな関門である。これが解けるかどうかで、その後の高校生活が大きく変わってしまうとも言われている。２次方程式が解けなかったことが原因で彼女に振られてしまったという男子高校生の数は、全国で 872 万にも上るらしい。また、全国の女子高校生の実に 70 %が、２次方程式が解けなかったことが原因で良いアルバイト先が見つからず、参考書を買うお金も稼げないという悪循環に苦しんでいるという。ここでは、そのような不幸な高校生達が元気を取り戻せるように、２次方程式の解き方を解説する。これを読んで一日も早く輝ける青春の銀幕に復帰しよう。

まずは、解くべき方程式を記しておこう。

$$ax^2+bx+c=0$$

これが２次方程式の最も一般的な形である[*58]　一般的に２次方程式は二つの解を持ち、諸君は今、様々な a,b,c の値に対して、その二つの答えを求めたいと思っているわけである[*59]。

２次方程式の解き方は、大きく分けて三つある。そのいずれも重要であるので、ここで詳しく見ていくことにしよう。

解き方その１．　因数分解：　因数分解ができれば、２次方程式はあっという間に解けてしまう。例えば、

$$2x^2+2x-60=0$$

は、因数分解ができて

$$2(x-5)(x+6)=0$$

となる。ここで、“二つの実数の積がゼロなら、どちらか少なくとも一方がゼロである”ことを思い出そう。それは以下のようなイメージである[*60]。

$$\bigcirc\triangle=0 \longrightarrow \bigcirc=0 \;\text{ 又は }\; \triangle=0$$

ということは、

$$2(x-5)(x+6)=0 \longrightarrow x-5=0 \;\text{ 又は }\; x+6=0$$

ということなので、答えは $x=5,-6$ となる。ここで、「結局、因数分解した式、$2(x-5)(x+6)$ を見れば、$x=5$ でゼロになるし、又は $x=-6$ でもゼロになるのは明らかだ。ということは、これらが答えということだ。要は、見るだけで答えが出るというわけだ。ここまで見抜いてしまうとは、俺って天才なんだな。自分の才能が恐いよ」などと語ることができれば、取り敢えず理解できていることになるであろう。

解き方その２．　平方完成：　簡単な例から始めよう。

$$x^2=7$$

*57 「金があったらホラ吹くかい！」でお馴染みの漫才師・横山たかしを見習おう。
*58 当然 a はゼロでない。ゼロなら一次方程式になってしまうからだ。
*59 思いなさい。
*60 これはあくまでも“二つの実数”に関する性質であることに注意しよう。